Kubuni Programu za Hesabu zenye Ufanisi katika Nchi za Kipato cha Chini na Kati

Utangulizi

Hesabu hazijapewa uzito katika majadiliano kuhusu ubora wa shule katika madarasa ya awali, licha ya ushahidi kwamba ustadi thabiti wa mapema wa hisabati hautabiri mafanikio ya baadaye ya kitaaluma tu[1] lakini unaweza kutabiri ustadi wa kusoma na kuandika,[2] kufanya hali ya kutumia muda sawa kwa ujuzi wa hisabati na kisomo tangu mwanzo.[3] Ufaulu wa mapema wa hesabu unahusishwa na matokeo ya maisha ya baadaye, ikiwa ni pamoja na kuhitimu shule ya sekondari na uwezo wa kupata fursa.[4] Pamoja na kuenea kwa teknolojia na kazi zinazohusiana na STEM, na hitaji la ujuzi thabiti katika kutafsiri data na utatuzi wa tatizo, kuwa na msingi thabiti wa hisabati kuna athari kwa kazi za karne ya 21 kwa sasa kuliko hapo awali.

MADHUMUNI

Katika mwongozo huu, tunatoa mapendekezo kwa watunga sera, wafadhili, na watekelezaji wa jinsi ya kubuni na kusimamia kwa ufanisi hesabu za msingi kwa kiwango. Tunawasilisha ushahidi kutoka nchi za kipato cha juu na nchi za kipato cha chini na cha kati (LMICs), inapopatikana na inapofaa, na kujadili ufumbuzi wa changamoto katika maeneo matatu: mtaala na viwango, walimu na ufundishaji, na vifaa vya kufundishia na kujifunzia. Mwongozo unahitimisha kwa majadiliano ya maeneo ambayo utafiti zaidi unahitajika.

UMUHIMU WA HESABU NA KUANZA MAPEMA

Binadamu huzaliwa na hisia ya asili ya nambari, na ujuzi wa msingi wa kuhesabu wa watoto wadogo unakuzwa zaidi wanapoingiliana na walezi, vitu vya kila siku, na mazingira yao.[5] Watoto wanapoingia shuleni, wanaanza kurasimisha maarifa yasiyo rasmi ya hisabati ambayo wameyakuza tangu kuzaliwa. Kwa mfano, wanajifunza kwamba vijiti wanavyohesabu na kucheza navyo vinaweza kuwakilishwa na alama zilizoandikwa kama vile "3" na "5," na kwamba kuweka vitu pamoja kunaitwa kujumlisha na kunahusishwa na ishara ya "+". Kuwaanzisha watoto katika safari yao ya hisabati kuanzia mwanzo wa kuzaliwa, kuendelea hadi shule ya awali, na kwa umakini wa kutosha katika madarasa ya awali-huweza kuondoa tofauti ya mafanikio kati ya watoto wanaotoka maisha tofauti ya kijamii na kiuchumi[6] na kutoa muda wa umahiri katika maeneo ya msingi kama kuhesabu na kutambua nambari, kanuni ambazo zimeonyesha kuathiri mafanikio ya baadaye katika hisabati.[7] Kuanza elimu ya hisabati mapema pia kunakuza mitazamo chanya kuhusu hisabati, ambayo utafiti umeonyesha huboresha matokeo katika shule ya msingi na zaidi.[8] Kwa kuongezea, utafiti unaonyesha kuwa watoto wenye shida ya ujuzi wa msingi wa hisabati huwa wanarudi nyuma zaidi na kuwa na wakati mgumu kufikia hatua ya wenzao,[9] wakionyesha umuhimu wa kukuza msingi mzuri mapema. **Kuanzisha wasichana katika safari yao ya hisabati mapema na kuwaweka wazi kwa ajira zinazohitaji hisabati, kama uhandisi na dawa, kunaweza kuwa na athari za muda mrefu katika utu uzima; ina uwezo wa kuziba utofauti wa malipo wa kijinsia; na husaidia kupunguza ukosefu wa usawa kati ya wavulana na wasichana.**[10]

UFAFANUZI MUHIMU

Hesabu: Ni maaarifa, stadi, muelekeo na tabia anaotakiwa kuwa nayo mwanafunzi ili aweze kutumia hisabati katika mazingira tofauti.

Ujenzi wa dhana/maarifa: Ufahamu wa dhana za kihesabati, njia na uhusiano wake.

Ufasaha wa kiutaratibu: ni uwezo wa kutumia taratibu kwa usahihi, ufanisi na kuendana na mabadiliko.

Ujuzi wa mchakato: ni njia ya kujenga na kutumia ujuzi wa kihesabati ikiwemo utatuzi wa tatizo, kujenga hoja na kuzithibitisha, kuhusisha dhana tofauti, kutumia modeli ili kuwasilisha dhana za kihesabati.

Hisia ya nambari: uwezo wa kufikiri namna tofauti na kwa usahihi kuhusiana na nambari kama kutoa nambari na kujumlisha nambari kwa njia tofauti, kuhesabu kwa kutumia akili na kuhusisha nambari na kuhusisha na utatuzi wa tatizo katika maisha ya kila siku.

Uchunguzi: ni zana halisi zinazoonekana zinazohamishika na zinazoweza kuguswa ambazo zinatumiwa ili mwanafunzi aweze kupata dhana ya kihesabati na kuzitumia kwa mfano vihesabio, vijiti, maumbo na vyenginevyo.

HALI YA MATOKEO YA HESABU KATIKA LMICS

Kipaumbele cha ujuzi wa kisomo katika LMICs kimetafsiriwa kuwa ukosefu wa utafiti juu ya hisabati kwa madarasa ya awali katika LMICs. Kati ya ushahidi mdogo uliopo, sehemu kubwa yake huzingatia kutathmini matokeo ya ujifunzaji na maendeleo ya watoto katika kupata stadi za msingi. Takwimu hazihimizi na kuonyesha kwamba watoto hawajui ujuzi wa mapema, wa msingi ambao unahitajika kwa kukuza dhana ngumu zaidi za kihisabati.

- Mitindo ya tathmini ya hesabu za darasa la awali kutoka Ghana mnamo 2013 na 2015 inaonyesha wanafunzi wakifanya vibaya zaidi ya vitu vya kiutaratibu na vya kukumbuka (utambuzi wa nambari na mambo rahisi ya kujumlisha/kutoa).[11]
- Katika wilaya moja katika jimbo la Punjab, Pakistan, Mtandao wa Vitendo vya Watu ulitumia zana ya Kimataifa ya Tathmini ya Kawaida ya Nambari kutathmini wanafunzi katika darasa la 2–3. Ni asilimia 32.2 tu ya wanafunzi hawa walioweza kufanya seti ya kazi za msingi za kuhesabu (kazi moja kila moja juu ya mwelekeo wa anga, utambuzi wa umbo, kipimo, na utambuzi wa nambari, pamoja na angalau mazoezi matatu rahisi ya nambari).[12]
- Nchini Tanzania mwaka 2013, ni asilimia 7.9 tu ya wanafunzi wa darasa la pili waliofikia kigezo cha kujumlisha na kutoa mwishoni mwa mwaka wa shule, huku wasichana wakiwa nyuma ya wavulana (asilimia 7.3 dhidi ya asilimia 8.5).[13]
- Kulingana na SACMEQ III iliyofanywa mnamo 2007 katika nchi 15 za Afrika Kusini mwa Jangwa la Sahara, 31% ya wanafunzi wa darasa la sita wanaorodheshwa kama wasio na ujuzi wa hesabu; nchini Zambia, idadi hii inaongezeka hadi 67.3%.[14]

HESABU NA JINSIA

Matokeo ya tathmini ya hisabati kwa wasichana na wavulana katika darasa la awali yanawaonyesha wakifanya vizuri sawa kuanzia shule ya chekechea hadi darasa la pili. Hata hivyo, kuanzia darasa la tatu, wavulana wanawashinda wasichana katika hesabu katika nchi nyingi.[15] Kadiri wanafunzi wanapoingia madarasa ya juu, hali hiyo huendelea. Kwa mfano, Ripoti ya Mwaka ya Elimu ya Pratham kutoka 2018 inaonyesha wavulana wenye umri wa miaka 14–16 wakifanya vizuri zaidi kuliko wasichana katika stadi za msingi za kugawanya.[16] Matokeo haya hayaonyeshi kwamba wavulana wanafaa zaidi kusoma hisabati kuliko wasichana. Badala yake, dhana potofu za kijinsia zinazowasilisha hisabati kama somo la wavulana, pamoja na mitazamo ya walimu kuhusu anayeweza na asiyeweza kufanya hisabati, zinahusishwa na mitazamo ya wasichana na uhamasishwaji juu ya hisabati.[17] Imani potofu na kanuni hizi zina nguvu sana katika LMICs, ambapo wasichana mara nyingi hutendewa tofauti na walimu na wazazi wana matarajio ya chini kwa wasichana ikilinganishwa na wenzao wa kiume.[18]

Mtaala na Viwango

MAENEO YA MAUDHUI

Utafiti wa hivi karibuni juu ya mitaala bora ya hisabati kwa watoto wadogo umebaini kuwa kutumia muda katika maeneo ya msingi ya maudhui na shughuli kunaweza kuboresha ujifunzaji wa hisabati kabla na mwanzoni mwa shule ya msingi.[19] Programu za mapema za hisabati ulimwenguni kote zinazingatia maeneo matano ya maarifa ya hisabati (tazama Jedwali la 1), ingawa zinaweza kupangwa tofauti katika nchi zote. Mfumo wa Ustadi wa Kimataifa (GPF) wa Hisabati-juhudi ya pamoja kati ya wafadhili, wataalamu wa hisabati za mapema, na jamii ya maendeleo ya kimataifa-unafafanua viwango vya chini vya ustadi ambavyo wanafunzi wanatarajiwa kupata mwishoni mwa darasa la 1–9 katika maeneo haya matano. Umahiri wa ujuzi na dhana ndani ya maeneo haya ya maudhui unawakilisha kiini cha maarifa ambayo yanahitajika kuweza kutumia hesabu kwa urahisi ili kutatua matatizo wanayokumbana nayo katika maisha ya kila siku na masomo ya baadaye. Kutokana na hili, **GPF inaweza kutumika kama chombo muhimu kwa nchi ambazo zinakagua mtaala wao, kwani inaweka kiwango cha chini cha ustadi kwa ujuzi na dhana za hisabati.**

JEDWELI LA 1. Maeneo ya ujenzi wa hisabati katika shule ya msingi

Maeneo	Kujenga
Nambari na mchakato	Nambari nzima; sehemu; desimali; njia/mchakato, changamoto za maisha ya kila siku kwa kutumia mzunguko na makisio kutatua tatizo na kuangalia matokeo/majibu.
Vipimo	Urefu, uwezo, ujazo, eneo, mzunguko, muda, sarafu na kutumia makadirio
Takwimu na makadirio	Udhibiti wa data, nafasi na makadirio
Maumbo na vigezo vyake	Sifa za maumbo, yanavyofanyika; nafasi na muelekeo wake.
Alijebra	Aina tofauti za maumbo yanavyohusiana na yanavyotumika (uwiano na asilimia yake)

MAENDELEO YA KUJIFUNZA

Kujifunza hisabati kunaweza kutazamwa kama kuendelea kupitia maendeleo ya kujifunza, ambapo uelewa wa watoto wa dhana unakua kupitia viwango vya hali ya juu vinavyotabirika.[20] Mtaala ambao "unazunguka" unasaidia maendeleo ya watoto kupitia viwango hivi katika kila eneo na husaidia watoto kujenga uelewa wa kina katika hisabati. Katika mtaala wa "mzunguko", kujifunza ndani ya kikoa huenezwa na dhana hupitiwa upya kwa miezi na katika madarasa yote. Wanafunzi huwekwa kwenye viwango vya juu vya uelewa kwa kupitia upya dhana fulani juu ya hali nyingi, ambazo husababisha ujifunzaji bora wa muda mrefu na huhimiza usanifu mkubwa katika fikra za kihisabati.[21] Katika mapitio ya maandiko juu ya faida za kuzunguka ikilinganishwa na "kukusanyika," ambapo mada moja inashughulikiwa katika kipindi kimoja cha muda mrefu bila mapumziko au kutembelea tena baadaye, Son na Simon[22] wanaona kwamba kuzunguka kunasababisha utendaji bora. Kwa mfano, kuhusu kujumlisha, watoto kwanza hujifunza jinsi ya kuongeza nambari za tarakimu moja (kama vile 4 + 5 na 2 + 3) na kurudi kwenye dhana hiyo mara nyingi zaidi ya mwaka, kila wakati na ugumu unaoongezeka (kwa mfano, kwanza kuongeza 4 + 5 na vitu, kisha na alama, na baadaye kwa tatizo la hadithi). Kujumlisha kwa msingi kama ujuzi wa msingi ni muhimu kwa kujenga ujuzi mgumu zaidi wa kujumlisha nambari za tarakimu nyingi, kama vile 34 + 65 na 206 + 329. Kupitia uzoefu na mazoezi ya mara kwa mara, wanafunzi hupata umahiri na ufasaha katika stadi muhimu za msingi.

Mpangilio wa ujuzi wa hisabati na jinsi kila ujuzi unavyofundishwa kuhusiana na wengine umechunguzwa sana.[23] Taarifa ya pamoja ya Chama cha Kitaifa cha Elimu ya Watoto Wadogo na Baraza la Kitaifa la Walimu wa Hisabati inasema kwamba "kuelezea malengo na viwango kwa watoto wadogo kama mwendelezo wa maendeleo au ujifunzaji ni mkakati muhimu sana katika kuhakikisha ushiriki na umahiri wa mawazo muhimu ya kihisabati."[24] Maendeleo ya kujifunza yaliyotengenezwa na watafiti yanaonyesha mpangilio ambao watoto wadogo huendeleza uelewa wa hisabati na ujuzi na ni chombo muhimu kwa wapangaji wa mitaala wakati wa kuweka viwango na kuendeleza mitaala (tazama Kielelezo cha 1). Mfumo wa maendeleo ya ujifunzaji unawasaidia walimu katika kutoa mikakati inayofaa kimaendeleo katika madarasa yao na kutoa msaada unaotolewa kwa kila mtoto, kwani sio watoto wote watakuwa sawa katika ujifunzaji wao wa hesabu kwa wakati mmoja. GPF ni mfano wa maudhui ambayo yamepangwa kulingana na maendeleo ya kujifunza yaliyoandikwa.

KUJENGA USTADI WA HISABATI

MAARIFA YA DHANA NA UTARATIBU

Ustadi katika kila eneo la hisabati unahitaji maarifa thabiti ya dhana, ufasaha wa kiutaratibu, na ujuzi wa mchakato. Maarifa ya dhana, "ufahamu wa dhana za hisabati, shughuli, na uhusiano";[26] ufasaha wa kiutaratibu, "uwezo wa kutumia taratibu kwa usahihi, kwa ufanisi, na kwa urahisi";[27] na ujuzi wa mchakato umeunganishwa na yote yanayohitajika kwa ajili ya kujenga ustadi. Utafiti unaonyesha kuwa **watoto wanaotumia mikakati ya hesabu iliyojikita katika uelewa wa dhana wa mfumo wa nambari hupata alama za juu katika tathmini za hesabu ikilinganishwa na wanafunzi wanaotegemea kukariri peke yake.**[28] Kila wakati dhana mpya inapoanzishwa, bila kujali daraja, ni muhimu kujenga uelewa huu wa dhana. Wakati huo huo, ufasaha wa kiutaratibu ni muhimu kwa kuimarisha dhana za awali na kujifunza dhana mpya. Fikiria, kwa mfano, wanafunzi wadogo wanajifunza kujumlisha nambari za tarakimu moja. Kama sehemu ya kujifunza msi0ngi wa kujumlisha, wanafunzi hujifunza tabia ya kubadilishana-kwa maneno mengine, kwamba 3 + 4 ni sawa na 4 + 3. Ujuzi huu wa dhana basi husaidia kuimarisha ufasaha wa kiutaratibu kwa kuongeza msingi kwa kupunguza nusu ya idadi ya matatizo wanayohitaji kujua haraka na kwa urahisi. Ufasaha huu, kwa upande wake, unawaruhusu kutumia kile wanachojua kuongeza nambari za tarakimu mbili kama vile 23 + 24.

KIELELEZO CHA 1. Maendeleo ya kujifunza kwa ajili ya kukuza uelewa kwa kujumlisha na kutoa[25]

Darasa la 1 – Wanafunzi:	Darasa la 2 – Wanafunzi:	Darasa la 3 – Wanafunzi:
Watatumia kujumlisha na kutoa na nambari chini ya 20 ili kutatua shida za maneno zinazohusisha hali za kuongeza, kuchukua, kuweka pamoja, kutenganisha, na kulinganisha (kwa mfano, kwa kutumia vitu, michoro, na mlinganyo). Watatatua matatizo ya maneno ambayo yanahitaji kuongezwa kwa nambari tatu nzima ambazo jumla yake ni chini au sawa na 20 (kwa mfano, kwa kutumia vitu, michoro, na mlinganyo). Watatumia tabia ya kubadilishana na ya ushirika ya kuongeza kwenye shughuli kama mikakati ya kujumlisha na kutoa. Watajumlisha na kutoa ndani ya 20, wakionyesha ufasaha wa kujumlisha na kutoa ndani ya 10. Kuelewa maana ya ishara sawa, na kuamua ikiwa mlinganyo unaohusisha kujumlisha na kutoa ni kweli au uwongo. Watajumlisha ndani ya 100, ikiwa ni pamoja na kuongeza nambari yenye tarakimu mbili na nambari yenye tarakimu moja, na kuongeza nambari yenye tarakimu mbili na zaidi ya 10, kwa kutumia mifano halisi au michoro na mikakati kulingana na thamani ya mahali, tabia ya shughuli, na uhusiano kati ya kujumlisha na kutoa; kuhusisha mkakati na njia iliyoandikwa. Watatoa mafungu ya 10 kwa uwiano wa 10–90 kutoka kwa mafungu ya 10 kwa uwiano wa 10–90, kwa kutumia mifano halisi au michoro na mikakati kulingana na thamani ya nambari, sifa za shughuli, na uhusiano kati ya kujumlisha na kutoa; kuhusisha mkakati na njia iliyoandikwa.	Watatumia kujumlisha na kutoa ndani ya 100 ili kutatua matatizo ya maneno ya hatua moja na mbili yanayohusisha hali za kuongeza, kuchukua, kuweka pamoja, kutenganisha, na kulinganisha (kwa mfano, kwa kutumia michoro na mlinganyo). Watajumlisha na kutoa kwa ufasaha ndani ya 20 kwa kutumia mikakati ya akili. Mwishoni mwa darasa la 2, watajua kutoka kwenye kumbukumbu jumla zote za nambari mbili za tarakimu moja. Watajumlisha na kutoa kwa ufasaha ndani ya 100 kwa kutumia mikakati kulingana na thamani ya mahali, tabia za shughuli, na uhusiano kati ya kujumlisha na kutoa. Watajumlisha hadi nambari nne za tarakimu mbili kwa kutumia mikakati kulingana na thamani ya mahali na tabia za shughuli. Watajumlisha na kutoa ndani ya 1000, kwa kutumia mifano halisi au michoro na mikakati kulingana na thamani ya nambari, sifa za shughuli, na uhusiano kati ya kujumlisha na kutoa; kuhusisha mkakati na njia iliyoandikwa. Kwa kutumia akili watajumlisha 10 au 100 kwenye nambari waliyopewa 100–900, na watoe 10 au 100 kiakili kutoka kwenye nambari waliyopewa 100–900. Eleza kwa nini mikakati ya kujumlisha na kutoa inafanya kazi, kwa kutumia thamani ya nambari na sifa za shughuli.	Watajumlisha na kutoa kwa ufasaha ndani ya 1000 kwa kutumia mikakati kulingana na thamani ya nambari, sifa za shughuli, na uhusiano kati ya kujumlisha na kutoa

UJUZI WA MCHAKATO

Ujuzi wa mchakato ni michakato ambayo wanafunzi hutumia kujenga na kutumia ustadi wa hisabati. Watoto wadogo wanapoendeleza ujuzi wa mchakato, wanaweza kushiriki katika hisabati ngumu zaidi.[29] Ujuzi huu wa mchakato hujengwa na kuungwa mkono kwa kuwashirikisha watoto katika mazoezi mbalimbali na yenye changamoto za kihisabati ambazo huhitaji kufikiri kwa hali ya juu.[30] Baraza la Kitaifa la Walimu wa Hisabati linafafanua ujuzi wa mchakato kama ifuatavyo, na umeonyeshwa katika Kielelezo cha 2:

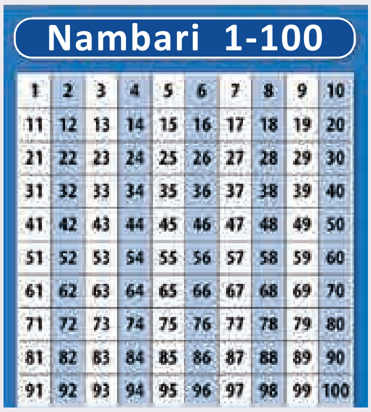
- kutatua matatizo ya dhahania na halisi na kujenga maarifa ya hisabati kupitia utatuzi wa tatizo
- kutambua na kutumia hoja na uthibitisho kama vipengele vya msingi vya hisabati
- kuwasilisha mawazo ya kihisabati kwa uwazi na uthabiti
- kutambua na kutumia uhusiano kati ya mawazo ya kihisabati na kati ya hisabati na taaluma nyingine
- kutumia uwakilishi kumodeli na kutafsiri dhana za kihisabati[31]

Kusaidia maendeleo ya mchakato wa ujuzi kwa upande wake husaidia watoto kujenga dhana na ufasaha wa utaratibu, na ujuzi mwingi wa mchakato hufanya kazi pamoja. Kwa mfano, majadiliano ya darasani ambapo wanafunzi wanaelezea mawazo yao na kuzingatia mikakati mingi inayowezekana ya kutatua tatizo hutoa fursa kwao kufanya mazoezi ya kutumia hoja na uthibitisho, pamoja na kuwasilisha mawazo ya kihisabati. Darasa hili "Majadiliano ya hisabati," ambalo linahitaji kazi nyingi kwa watoto kutatua na maswali ya kuchochea kutoka kwa walimu, husababisha maendeleo ya uelewa wa kina na ustadi.[33] Kielelezo cha 3 kinatoa mfano wa maswali ambayo walimu wanaweza kuuliza ili kuzalisha "majadiliano ya hisabati."

Mchakato thabiti wa ujuzi pia huruhusu wanafunzi kutumia maarifa wanayoyajenga kutatua matatizo halisi ya ulimwengu yanayotokea katika maisha yao. Wanafunzi wanaweza kuona viunganisho miongoni mwa maeneo ya kihisabati na maeneo mengine ya somo, kama vile jukumu la data katika sayansi, ambayo huunda uelewa mpya na wenye nguvu ya ulimwengu.

KUTUMIA CHATI YA 100s

Chati ya 100 ni kifaa rahisi lakini chenye nguvu cha kujifunzia ambacho kinaweza kuwasaidia wanafunzi katika nambari na shughuli za darasa la awali. Chati hii huwasaidia wanafunzi kuona na kuelewa mifumo na uhusiano kati ya nambari hadi 100 na kujenga uelewa wa dhana na ufasaha wa kiutaratibu kwa kutumia chati ili kusaidia shughuli kama vile kuchupiza kuhesabu, kutambua mifumo, na kujumlisha na kutoa. Kwa mfano, wanafunzi wanapoanza kujifunza jinsi ya kutatua matatizo kama vile 34 + 52, chati ya 100 hutoa jalada la kuona kuhusu jinsi ya kuunda mikakati tofauti ya kutatua tatizo- kama vile kwa kuanza kwenye sanduku kwa 34 na kuhesabu chini safu 5 (50) na kisha kwenye safuwima 2 za kulia (2) ili kupata 86. Hatimaye, wanafunzi wataweza kuiga mchakato huu bila kurejelea chati. Kwa hivyo, maana ya dhana ya mifumo ya nambari ambayo wanafunzi hupata kwa kutumia chati ya 100 pia itawasaidia kupata ufasaha.



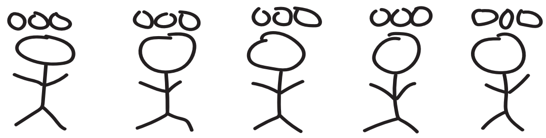
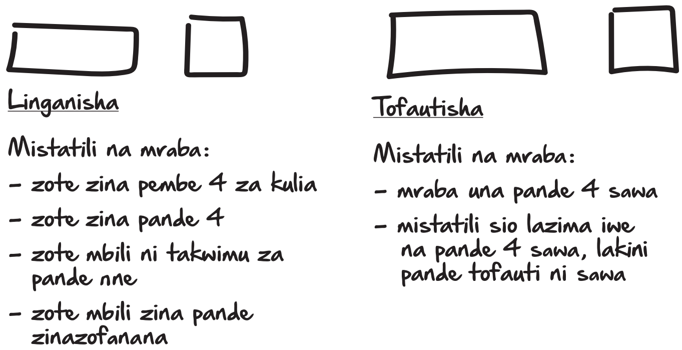
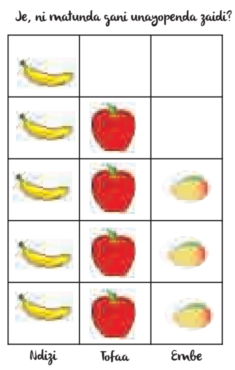
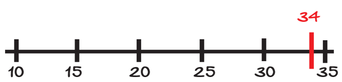
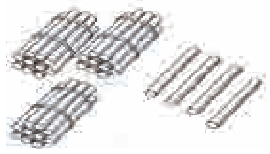
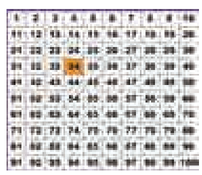
MITAALA NA VIWANGO WA LMICS

Wakati maeneo ya msingi wa hisabati mara nyingi yanawakilishwa katika mitaala na viwango vya hisabati katika LMIC, utafiti juu ya mitaala ya hisabati ya darasa la awali unaonyesha kuwa maudhui ya mitaala mara nyingi hayaendani na maendeleo ya kujifunza na kwamba kuna msisitizo mkubwa juu ya maarifa ya kiutaratibu kuliko maarifa ya dhana na ujuzi wa mchakato.[34]

Kwa mfano:

- **Maendeleo kati ya madarasa**: Kuruka kwa utambuzi kutoka shule ya awali, ambapo hesabu mara nyingi hazijadiliwi sana, hadi darasa la kwanza kunaweza kuwa kukubwa. Katika mitaala ya msingi, hesabu zinakuwa na mzigo mkubwa, na kasi ambayo maudhui yanafundishwa hayaendani na ujifunzaji wa wanafunzi.[35] Nchini Pakistan, tathmini ya kitaifa iliyofanywa mnamo 2015 iligundua kuwa ni theluthi tatu tu ya wanafunzi wa darasa la tatu katika maeneo ya mijini ndio wangeweza kufanya kwa usahihi zoezi lakutoa (54-25); katika maeneo ya vijijini, ni theluthi mbili tu ndio wangeweza kufanya hivyo.[36]
- **Maendeleo na uhusiano kati ya mada:** Maendeleo na uhusiano katika mada za hisabati huenda isiambatane vizuri. Kwa mfano, nchini Msumbiji, vitabu vya kiada vilirekebishwa ili kujumuisha changamoto zaidi zilizo halisi, lakini maudhui yanayohusiana na kupima vitu kwa kutumia sentimita na mita, ambazo hazikufundishwa hadi darasa la pili, yalikuwepo katika shughuli katika kitabu cha kiada cha darasa la kwanza.[37]
- **Matarajio yasiyo na uhalisia**: Katika muktadha mwingi, mtaala umejaa kupita kiasi na hauendani na ujifunzaji wa wanafunzi. Kwa mfano, nchini Uganda, wanafunzi wanatarajiwa kujua jedwali la kuzidisha hadi 6, kugawanywa kwa 1, 2, 3, na 4, na jinsi ya kuongeza sehemu ifikapo mwisho wa darasa la pili. Hii haiendani na mitaala mingi katika kanda na nchi zilizoendelea, ambapo wanafunzi kwa ujumla hufundishwa stadi hizi katika darasa la tatu na la nne.[38]

KIELELEZO CHA 2. Ujuzi wa msingi wa mchakato wa hisabati

Ujuzi wa mchakato	Vielelezo kutoka darasani
Kutatua matatizo ya dhahania na halisi	Wanafunzi wanatakiwa kutatua tatizo kuhusu idadi ya vifuniko vya chupa vinavyohitajika ikiwa kuna vifuniko 15 vya chupa ambazo zinahitaji kugawanywa kati ya wanafunzi 5. Mwalimu anawahimiza wanafunzi kutatua tatizo kwa njia tofauti, kama vile kupitia michoro na kutumia mlinganyo. 
Kutambua na kutumia hoja na uthibitisho kama mawazo ya msingi ya hisabati	Wanafunzi wanaombwa kuthibitisha kwamba miraba yote ni mistatili kwa kutumia ujuzi wao wa sifa za mstatili na mraba. 
Kuwasilisha mawazo ya hisabati kwa uwazi na uthabiti	Wanafunzi na walimu wanajihusisha na mazungumzo ya hisabati kuhusu tatizo 29 + 11, wakielezea njia mbalimbali za kutatua tatizo na kutoa hoja kuhusu suluhisho zisizo sahihi.
Kutambua na kutumia uhusiano kati ya mawazo ya kihisabati	Wanafunzi darasani hupiga kura ili kujua matunda yanayopendwa na kila mwanafunzi. Kisha wanafanya kazi pamoja kutengeneza picha ya matokeo. Wanakuja na maswali na majibu kwa kutumia picha—kama vile "Ni tunda gani maarufu zaidi darasani? Je, ni kipi kisicho maarufu zaidi? Ni watu wangapi zaidi wanapenda tufaha kuliko maembe?" Mwishowe, wanajadili shughuli watakazotumia kupata majibu. 
Kuwakilisha mawazo ya hisabati au dhana zilizo na mifano	Mwanafunzi anaonyesha nambari 34 kwa njia nyingi: kwa kutumia mstari wa nambari, vijiti vya kuhesabu, na chati ya miaka 100.   

- **Msisitizo juu ya maarifa ya kiutaratibu kuliko maarifa ya dhana**: Katika muktadha nyingi, mtaala na ufundishaji umependelea kutumia kukariri na kuzingatia hasa taratibu za kujifunza badala ya kuelewa dhana za hisabati. Kwa mfano, nchini Ghana, tathmini iliyofanywa na Wizara ya Elimu kuhusu wanafunzi kupata alama mbaya kwenye alama za kawaida za mtihani wa hisabati ilibaini mambo kadhaa, ikiwa ni pamoja na "asili ya mtaala, usambazaji duni wa nyenzo za kufundishia/kujifunzia hisabati, maarifa dhaifu ya maudhui ya mwalimu na walimu kutumia mazoea yasiyofaa ya kufundisha hisabati."[39] Na licha ya mchakato mkubwa wa mageuzi ya mitaala, ambao pia ulibadilisha sana mafunzo ya walimu kazini, walimu wanaendelea kusisitiza ujuzi wa kiutaratibu kuliko kujenga maarifa ya dhana; sababu moja ya hii ni kutofautiana kati ya mtaala wa taasisi za mafunzo ya walimu na mitaala ya shule.[40]

KIELELEZO CHA 3. Kutumia maswali kusaidia "mazungumzo ya hisabati"[32]

Ulipataje jibu hilo?
Unajuaje?
Umegundua nini...?
Kwa jinsi gani hii ni sawa au tofauti na…?
Ungewezaje kutatua tatizo hilo kwa njia nyingine?

MAPENDEKEZO

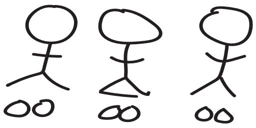
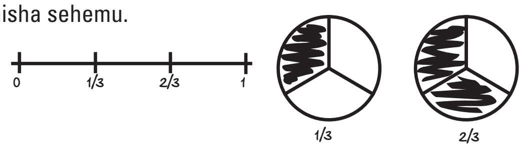
- **Mitaala ya hisabati inapaswa kujumuisha maeneo ya msingi na kufuata mfumo wa maendeleo ya ujifunzaji (kama vile GPF).** Watoto wanapaswa kufundishwa katika maeneo matano ya msingi: namba na kanuni, kipimo, takwimu, jiometri, na aljebra. Kujifunza katika nyanja hizi kunapaswa kufuata maendeleo yaliyowazi ya ujifunzaji ili kusaidia ushiriki na umahiri.
- **Mtaala wa hisabati unapaswa kujumuisha zingatio maalumu katika kujenga uelewa wa dhana, ufasaha wa kiutaratibu, na ukuzaji wa ujuzi wa mchakato.** Mtaala kamili wa hisabati huwasaidia watoto kuelewa dhana za hisabati na sio tu kukariri seti ya sheria na taratibu. Kujifunza jinsi ya kutatua changamoto ya hisabati kiutaratibu, bila kuelewa dhana ya msingi, husababisha uelewa mdogo wa hisabati na kutokuwa na uwezo wa kutumia maarifa ya dhana na kiutaratibu kutatua changamoto.
- **Shule zinapaswa kupitisha mtaala wa "kuzunguka", ambao unasaidia uelewa wa dhana kwa kutofautisha maudhui na kupitia tena dhana mwaka mzima.** Njia hii hupelekea uhifadhi mkubwa na ujifunzaji wa muda mrefu. Pia huwasaidia watoto kujifunza nyenzo ngumu na zenye changamoto katika mwaka mzima wa shule, na kuimarisha uelewa wao wa dhana fulani kila inapofundishwa.
- **Ili kukuza mitaala mipya au kuboresha upya mitaala ya sasa, wataalamu wenye ujuzi anuwai wanahitajika: wale ambao wana uelewa wa kina wa maendeleo ya ujifunzaji katika nyanja mbalimbali nchini; wale ambao wana uzoefu wa vitendo nchini; na wale ambao wana uzoefu wa kutunga na kuchapisha mitaala nchini.** Utungaji wa mtaala wa hisabati mara nyingi hujadiliwa kuhusu kile kinachochukuliwa kuwa sahihi kimaendeleo (kwa mfano, Je, tunapaswa kufundisha sehemu katika madarasa ya awali? Ufundishaji wa sehemu unapaswa kuanza lini?). Aina hizi za maswali ni muhimu kujadiliwa miongoni mwa wataalamu, ambao wanapaswa kutumia utafiti na maarifa ya ndani kuamua kile kinachofaa.

Walimu na Ufundishaji

MIKAKATI YA KUFUNDISHIA YENYE ATHARI KUBWA

Darasani, mbinu ya kufundishia na mikakati inayotumiwa na walimu ina athari zaidi kwa ujifunzaji wa wanafunzi kuliko aina ya kitabu cha kiada au mtaala unaotumiwa.[41] Mikakati ifuatayo ya matokeo makubwa[42] iliyoonyeshwa katika Jedwali la 2 inasaidia ukuzaji wa maarifa ya dhana na utaratibu, pamoja na ujuzi wa mchakato, na imehusishwa na matokeo bora ya kujifunza hesabu:

JEDWELI LA 2. Mikakati ya kufundishia yenye athari kubwa

Mkakati	Mfano	Manufaa ya mwanafunzi
Kuhusianisha na hisabati zisizo rasmi	Wakati wa kuanzisha dhana ya kugawanya, mwalimu huwapa wanafunzi changamoto inayojulikana na halisi kufanyia kazi: Akilah ana maembe 6. Yeye na dada zake wawili wanataka kugawana sawa. Je, kila dada atapata maembe mangapi?  Baada ya kufundisha dhana ya kugawanya, mwalimu anawaomba wanafunzi kutumia maarifa yao kutatua changamoto ngumu, kama vile: Kuna matikiti maji 80 ambayo yanahitaji kufungashwa kwenye masanduku yanayobeba matikiti maji 10 kila moja. Je, unahitaji masanduku mangapi?	• Husaidia wanafunzi kujifunza hisabati nje ya shule kwa maarifa wanayojifunza ndani ya shule • Kuunganisha hisabati isiyo rasmi na rasmi huwapa wanafunzi uelewa wa kina wa hisabati • Maarifa kutoka nje ya shule yanarasimishwa na kuwakilishwa kwa alama kama vile + na = • Maarifa kutoka shuleni hupewa maana kupitia matumizi ya kila siku
Kujadili hisabati	Wakati wa kujadili tatizo, mwalimu anawezesha majadiliano ambapo wanafunzi wengi wanashiriki mikakati waliyotumia kufikia suluhisho moja. Wanafunzi hutumia **maelezo na uthibitisho** kuonyesha kwa nini wanafikiri suluhisho lao ni sahihi. Mwalimu anatumia **swali** kuwauliza wanafunzi waeleze kwa nini suluhisho lisilo sahihi si sahihi.	• Husaidia wanafunzi kujifunza kuhoji suluhisho lao • Husaidia wanafunzi kuelewa na kufafanua dhana muhimu • Inachangia kukuza uelewa mpya na wa kina • Inasaidia kuunda mikakati mipya • Huwafanya wanafunzi wawajibike kwa ujifunzaji wao wenyewe
Kutumia mitindo na uwakilishi unaofaa	Mwalimu huwa mfano kwa wanafunzi kwa njia mbili tofauti za kuwakilisha sehemu na kisha huwauliza wafanye mazoezi kwa kutumia mifano ili kulinganisha sehemu. 	• Huwawezesha watoto "kuona" dhana dhahania za hisabati • Husaidia wanafunzi kufikiri kwa uwazi na mawazo ya hisabati • Hutoa maana ya ishara za kufikirika
Kutumia maarifa ya wanafunzi na maendeleo ya ujifunzaji kulenga ufundishaji	Wanafunzi wanajitahidi kutumia algorithimu ya kiwangoili kutatua tatizo $\begin{array}{r} 28 \\ + \; 53 \\ \hline \end{array}$ Wanafunzi wengi wanafikiri kwamba jibu ni 71, sio 81. Mwalimu anatambua anahitaji kukagua dhana ya thamani ya mahali kabla ya kuendelea na algorithimu.	• Hutumia maendeleo ya ujifunzaji kutoa kwenye ufundishaji unaofaa • Inaruhusu kufundisha tena dhana na ujuzi inapohitajika • Hutoa fursa nyingi na mazoezi ya kujenga maarifa

Tathmini ya muundo ni mkakati mwingine muhimu wa kufundisha wenye athari kubwa, ingawa sio wa kipekee katika hisabati. **Kuingiza tathmini ya muundo katika mazoezi ya kawaida ya darasani, na kuunganisha na mikakati ya kufundishia iliyoorodheshwa hapo juu, husaidia matokeo thabiti ya ujifunzaji wa wanafunzi.**[43] **Mafanikio ya kujifunza ni makubwa zaidi wakati taarifa kutokana na tathmini zinapotumika kurekebisha ufundishaji na kutambua njia za kutoa msaada kwa wanafunzi.**[44] Zana rahisi na za kuaminika za tathmini ambazo zinaunganishwa na ujuzi muhimu na shughuli zinazohusiana za kurekebisha au kuimarisha zinapaswa kutumiwa na walimu kila wakati. Jitihada za mafunzo ya walimu lazima zijumuishe matumizi ya tathmini inayoendelea ya mafunzo katika mipango ya mafunzo, ikiwa ni pamoja na muda wa kufanya mazoezi ya kuzisimamia na kuzikagua. Walimu watahitaji kuungwa mkono katika kusimamia kazi hii ngumu na kupewa mwongozo thabiti wa jinsi ya kuijumuisha katika mazoezi ya kila siku, haswa kwa madarasa makubwa. Tazama mwongozo wa Maelekezo ya Tathmini: Ngazi ya Darasani kwa majadiliano ya kina zaidi ya tathmini ya mafunzo.

MAARIFA YA MAUDHUI YA MWALIMU NA MAARIFA YA MAUDHUI YA UFUNDISHAJI

Ili kufundisha kwa ufanisi, walimu wanahitaji kukuza maarifa ya maudhui yenye nguvu (maarifa ya hisabati) na maarifa ya maudhui yenye nguvu ya ufundishaji (maarifa kuhusu kufundisha hisabati).[45] Uelewa "ulioounganishwa" wa maudhui ya hesabu za mapema ambayo yanajumuisha maarifa ya jinsi ujifunzaji wa hesabu unavyoendelea na maarifa ya maudhui ya ufundishaji husababisha uelewa thabiti wa dhana na matokeo makubwa kwa watoto.[46] Hill na Ball waligundua kuwa walimu walioko kazini walionyesha ukuaji mkubwa zaidi kupitia maendeleo ya kitaaluma ambayo yalilenga maudhui ya hisabati na matatizo ambayo wangekabiliana nayo kama walimu.[47]

Katika LMICs, walimu wengi hawana ujuzi thabiti wa stadi za msingi za hisabati, hasa zile zinazohitaji uelewa wa dhana. Utafiti katika nchi zote za Afrika uligundua kuwa zaidi ya 90% ya walimu waliweza kutatua matatizo ya msingi ya kujumlisha lakini maudhui yalipokuwa magumu zaidi na yasiyo ya kiutaratibu, idadi ilipungua: 11% tu ndio walioweza kutafsiri data katika grafu na 15% tu ndio walioweza kutatua matatizo ya maneno.[48] Kulingana na utafiti wa Benki ya Dunia kutoka Amerika ya Kusini na Karibiani, 84% ya walimu nchini Peru walipata alama chini ya kiwango cha 2 katika hisabati, ambayo inafafanuliwa na Wizara ya Elimu ya Peru kama "hawawezi kuweka uhusiano wa hisabati na kurekebisha taratibu na mikakati rahisi ya hisabati."[49]

Linapokuja suala la kufundisha hesabu, walimu wengi hutegemea mbinu za kukariri ambazo zinapendelea ufasaha wa kiutaratibu kuliko uelewa wa dhana.[50] Hii inaweza kuonyesha mapambano na maarifa ya maudhui ya hisabati na maarifa ya maudhui ya ufundishaji, ambapo walimu wanaweza wasijue jinsi ya kufundisha mawazo ya kihisabati kwa dhana na badala yake kuzingatia utaratibu, wakitegemea jinsi walivyojifunza hisabati wenyewe. Kwa mfano, walimu wengi wanajua jinsi ya kutatua tatizo 41+ 56 kwa kutumia utaratibu wa kuongeza safu, lakini hawajui ni mikakati na mifano gani ya kutumia kumsaidia mwanafunzi kuelewa algorithimu. Walimu wanaweza kujua taratibu za kuunda visehemu sawa, lakini huenda wasielewe jinsi ya kuwakilisha visehemu sawa kwenye mstari wa nambari na mfano wa eneo. Nchini Paraguay, utafiti juu ya mazoea ya hisabati ya walimu ulionyesha kuwa 90% ya walimu wa shule za awali hawakuelewa maudhui ya hisabati ambayo walikuwa wakifundisha kwa wanafunzi wao,[51] na nchini Afrika Kusini, ufaulu duni wa wanafunzi umehusishwa na maarifa duni ya walimu katika somo hilo.[52] Nchini Kenya, utafiti umeonyesha kuwa walimu mara nyingi hutegemea sana kukariri, kukumbuka, na mhadhara kutoa taarifa,[53] na lugha ya darasani ni rasmi na haina uhusiano wowote na uhalisia.[54] **Mbinu ya mafunzo ya walimu ambayo inajumuisha na kuunganisha vya kutosha maudhui na maarifa ya maudhui ya ufundishaji yatawafanya walimu wawe tayari zaidi kufundisha dhana za hisabati za darasa la awali.**

MAENDELEO YA KITAALUMA YA MWALIMU KATIKA LMICS:

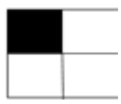
Elimu ya walimu kabla ya utumishi katika LMIC nyingi inakabiliwa na changamoto nyingi, kama ilivyojadiliwa katika mwongozo wa jinsi ya kufanya Elimu ya Mwalimu kabla ya utumishi. Ripoti ya UNESCO juu ya maandalizi ya walimu katika Amerika ya Kusini iligundua kuwa mipango ya kabla ya utumishi haikutoa muda wa kutosha au kuzingatia umahiri wa maudhui na ujifunzaji amilisho, na mazoezi ya kufundisha shuleni yalikuwa machache sana au hayakupatikana kabisa.[55] Ingawa walimu wanaweza kutaka kutumia mikakati kama vile majadiliano, kazi ya vikundi vidogo, na kuhusianisha na ulimwengu wa nje katika madarasa yao, mifano ya njia hii ya kufundishia "iliyounganishwa" katika muktadha wao ni midogo.[56] Kwa hivyo, chaguo-lao la msingi ni kurudi nyuma kwenye mikakati ya jadi kama vile kukariri na kukumbuka.[57]

Mwalimu kabla ya utumishi na mipango ya mafunzo ya hisabati kwa kawaida huajiri kitivo ambacho kinaweza kuwa na maarifa thabiti ya maudhui lakini ambao hawajajiandaa vya kutosha kufundisha dhana za hisabati, haswa katika madarasa ya msingi ya awali.[59] Utafiti mmoja uligundua kuwa wakufunzi wa walimu wa hisabati nchini Ghana wanajitahidi kutoa mwongozo unaofaa katika matumizi ya nyenzo za kufundishia na kujifunzia, sehemu muhimu ya ufundishaji na ujifunzaji katika miaka ya mwanzo. Walimu mara nyingi hawapewi nafasi ya "kutafakari, kuchambua, au kukosoa jinsi njia maalumu itakavyofanya kazi kwa kuwafundisha wanafunzi wao wa baadaye katika mazingira halisi ya darasani."[60] Wakufunzi wa walimu pia hawahitajiki kuwa na uzoefu wa kufundisha shuleni-na wanapokuwa na uzoefu kama huo, kwa kawaida ni kutoka ngazi za kati na sekondari. Programu za maandalizi ya walimu zinapaswa kuhakikisha kuwa kitivo kina maarifa ya vitendo vya kisasa madarasani na kinaweza kutoa maarifa ya jinsi ya kufundisha, pamoja na kinachopaswa kufundishwa, katika muktadha huu.

MAARIFA YA MAUDHUI YA UFUNDISHAJI YA WALIMU

Matatizo kama haya hapa chini yanaweza kutumika kuelewa maarifa ya walimu yaliyopo na kukuza maarifa ya walimu wakati wa vikao vya maendeleo ya kitaaluma.

Kwa swali "Ni sehemu gani ya mraba mkubwa ambayo sehemu yenye kivuli inawakilisha?" mwanafunzi alijibu "1/3." Ni sababu zipi kati ya zifuatazo ambazo mwanafunzi anaweza kupata jibu kama hilo?



a. Hili ni jibu sahihi
b. Mwanafunzi hafahamu kwamba kigawo cha chini lazima kiwe na sehemu zote sawa
c. Mwanafunzi alikosea kuhesabu
d. Ninapata shida kujibu

Almaz alijumlisha 35 na 36 pamoja na kusema kuwa jumla ilikuwa 611.
Nini kinaweza mwalimu wake afanye ili kumsaidia Almaz?

a. Toa changamoto zaidi za mazoezi yanayofanana
b. Kagua mada ya kujumlisha na kutoa hadi 20
c. Kagua mada ya thamani ya sehemu ya namba
d. Ninapata shida kujibu

Kubadilisha mazoezi ya walimu huchukua muda, na si walimu wote watakuwa huru kutekeleza mawazo mapya mara moja. Ni muhimu kukutana na walimu pale walipo na kutoa fursa za ukuaji katika ngazi zote. Sitabkhan na wengine. wanajadili pointi nne tofauti za kuingia katika njia za maendeleo ya kitaaluma ya walimu na kutoa mifano ya jinsi ya kuwasaidia walimu katika kuelewa na kutekeleza mikakati yenye athari kubwa katika madarasa yao, kulingana na kiwango chao cha ustadi na maarifa (tazama Kielelezo cha 4).[61] Kupitia msaada wa walimu ulioimarishwa na utumishi wa awali ulioratibiwa, huduma ya ndani inayoendelea, walimu wanaweza kupata maarifa na ujuzi unaohitajika ili kutumia mikakati ya kufundishia yenye athari kubwa katika madarasa yao.

MAPENDEKEZO

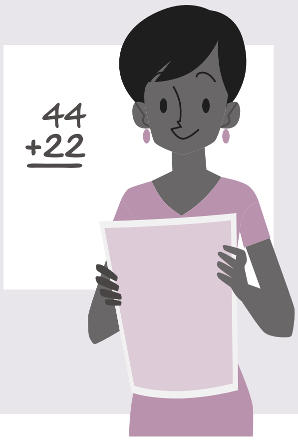
- **Jenga kada ya kitivo cha kabla ya utumishi, wakufunzi wa huduma na makocha wenye maudhui ya hisabati na maarifa ya ufundishaji.** Walimu wapya wanahitaji msaada, kutiwa moyo, na mfano wa kuigwa. Wanapaswa kupata msaada thabiti kutoka kwa mtaalamu wa somo ambaye anaangalia masomo na mitindo ya kufundisha kwa ufanisi, akizingatia mienendo halisi ya darasani.
- **Hakikisha kwamba maendeleo ya kitaalamu ya kabla ya utumishi yanajumuisha na kuunganisha maarifa ya maudhui ya hisabati na maarifa ya maudhui ya ufundishaji.** Programu za mafunzo ya walimu lazima zishughulikie dhana za hisabati katika maeneo matano kwa kutumia mbinu rahisi za kutatua matatizo zilizojikita katika uelewa wa dhana. Msisitizo juu ya uelewa wa kina - badala ya hatua za kiutaratibu tu za kutatua matatizo - lazima ziwe msingi wa mipango ya maandalizi, hususani kwa dhana dhahania kama vile thamani ya mahali na dhana ya nambari sawa na isiyo ya kawaida. Kuwaonyesha walimu jinsi ya kuhusianisha katika maeneo mengine-kwa mfano, kuonyesha uhusiano kati ya kujumlisha na kuzidisha, na jinsi eneo la umbo linavyohusiana na sifa zake za kijiometri-ni muhimu katika kuwasaidia walimu kukuza uelewa "uliohusianishwa" wa hisabati. Walimu wanapaswa kujihusisha na utatuzi halisi wa matatizo ili waweze "kuona" jinsi ya kutatua tatizo kwa njia nyingi na kujifunza jinsi ya kuelezea na kuthibitisha majibu yao. Aina hii ya mazoezi itawaandaa walimu kuweza kuongoza majadiliano ambapo wanafunzi wanashiriki majibu mengi.
- **Weka katika jozi wanafunzi wa mwalimu na walimu wakuu kwa uzoefu wa mazoezi ambao huwaweka wanafunzi katika hali halisi ya darasani.** Mazoezi ni muhimu kwa walimu wa kabla ya utumishi na lazima wawe wa muda ambapo wanaweza kutumia maarifa na ujuzi waliojifunza wakati wa mpango wao wa maandalizi. Walimu wakuu lazima watambue jukumu lao katika kuwa mfano wa ufundishaji thabiti kwa wafunzwa na kuwapa uzoefu mzuri wa kukuza ujuzi. Tazama pia mwongozo wa jinsi ya Elimu ya Mwalimu wa Kabla ya Utumishi kwa majadiliano zaidi. Pia ni muhimu kwa walimu wakuu kuwasaidia walimu wanafunzi kubadilisha mitazamo ya kijinsia kwamba hesabu ni somo la wavulana. Ni asilimia ndogo tu ya wasichana wanaofuata kazi katika sayansi au uhandisi, kutokana na kiasi kikubwa cha mitazamo kama hiyo miongoni mwa wazazi, walimu, na wanajamii. Walimu lazima wawe watetezi thabiti wa ubora wa wasichana katika nyanja ambazo zinahitaji usuli thabiti wa hisabati.

UTATUZI HALISI WA TATIZO[58]

Katika jitihada za kuboresha matokeo ya mwanafunzi wa hisabati nchini Ghana, mtaala mpya wa msingi wa hisabati ulitengenezwa ambao unazingatia kuongeza uelewa wa wanafunzi wa hisabati, kwa kutumia mifano ya vitu halisi kuwakilisha dhana za hisabati, na kusisitiza ujuzi wa hesabu ya akili ya wanafunzi. Kwa msaada kutoka mpango wa Mafunzo wa Ghana unaofadhiliwa na USAID, miduara ya mafunzo ya kila wiki iliwasaidia walimu kuacha kuzingatia kukariri taratibu ili kujenga uelewa wao wenyewe wa dhana za hisabati. Walimu wanaohusika katika kutatua matatizo halisi ya hisabati.

Mwishoni mwa kipindi cha afua, idadi kubwa ya walimu (89%) walihisi kuwa programu ya kazini iliongeza ujuzi wao wa hisabati. Takriban robo tatu ya walimu walihisi kuwa programu hiyo ilikuwa na ufanisi zaidi kuliko programu za jadi za kazini katika kuwasaidia kujaribu mazoezi mapya ya kufundishia hesabu darasani na katika kuwasaidia kuelewa mifano na mazoea mapya.

KIELELEZO CHA 4. Njia ya kitaalamu ya mwalimu ya kujadili hisabati



Kujenga maarifa ya mwalimu

Wakati wa maendeleo ya kitaaluma, walimu hufanya mazoezi ya kutatua shida wenyewe, kuchunguza njia nyingi za suluhisho, na kuelezea suluhisho lao kwa kila mmoja.

Kuanza kujumuisha matumizi

Mwalimu anawasilisha tatizo darasani, na anawaomba angalau wanafunzi 3 watoe jibu lao. Mwalimu anamuuliza mwanafunzi mmoja mwenye jibu sahihi aeleze suluhisho lake.

Kuchunguza kwa kina zaidi

Mwalimu anawasilisha tatizo darasani, anawaomba wanafunzi wengi kushiriki majibu yao, na kisha anawaomba wanafunzi waeleze na kuthibitisha majibu yao.

Kupanua na kuboresha

Mwalimu anawashirikisha wanafunzi katika majadiliano ya hisabati, akiuliza maswali ya wanafunzi kwa ufumbuzi sahihi na usio sahihi. Mwalimu na wanafunzi wanasikilizana na kutoa mrejesho inapohitajika.

- **Hakikisha kwamba mafunzo kazini, pamoja na usaidizi unaoendelea, yanakumbatia mikakati yenye athari kubwa na hutoa ufungaji kwa walimu kuwa na ujuzi zaidi baada ya muda.** Walimu wanaweza kushiriki katika mafunzo yanayolenga mazoezi bora ya kufundisha, lakini mabadiliko ya ufundishaji huchukua muda. Kukutana na walimu mahali walipo ni muhimu katika kujenga ujasiri na mafanikio. **Njia za maendeleo ya kitaaluma, na vituo mbalimbali vya kuingia kulingana na ustadi na maarifa ya mwalimu, zinaweza kusaidia walimu katika kuelewa na kutekeleza mikakati ya ufundishaji yenye athari kubwa katika madarasa yao kwa kasi yao na kiwango cha kutuliza.** Kwa kuongezea, njia zingine za kufundisha zinakuza viwango vya juu vya mafanikio kwa faida ya wasichana, pamoja na kuwasilisha shida za hisabati katika muktadha unaofaa kijinsia; kuweka shida za hisabati ambazo zinakuza uelewa wa kina; kutumia njia za kushirikiana darasani; na, kwa kutumia njia za tathmini ambazo hazina muda maalumu.[62] Mawazo haya yanapaswa kujumuishwa katika mipango ya mafunzo ya walimu kabla ya utumishi. Tazama mwongozo wa kanuni za ufundishaji uliopangwa kuhusu Maendeleo ya Kitaalamu ya Mwalimu: Mafunzo ya Mwalimu na Maendeleo ya Kitaalamu ya Mwalimu: Msaada kwa Walimu Unaoendelea.

Nyenzo za Kufundishia na Kujifunzia

UMUHIMU WA NYENZO ZA KUFUNDISHIA

Nyenzo za kufundishia ni sehemu muhimu ya ufundishaji na ujifunzaji wa hisabati. Miongozo ya walimu, vitabu vya kazi vya wanafunzi, na vitabu vya kiada ni aina ya kawaida ya nyenzo za kufundishia. Vile vile nyenzo za vitu ambavyo vinaweza kuhamishwa na kushikwa; hizi mara nyingi hujulikana kama mbinu za kutia chumvi na hujumuisha vihesabio, vidole, , shanga, vijiti , maumbo ya kijiometri, nakadhalika.

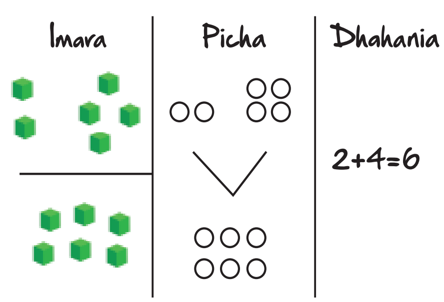
Mbali na nyenzo halisi, mifano ya picha au uwakilishi (kama vile michoro, vielelezo na alama) pia husaidia kufanya dhana za kufikirika ziwe wazi zaidi kwa watoto wadogo. Katika darasa la msingi la awali, watoto wanaweza kufanya kazi kwanza na mbinu za kujifunza kwa uchunguzi, kisha watumie uwakilishi uliochorwa au wa picha, na hatimaye kutegemea alama za hisabati za dhahania ili kuwakilisha mawazo au dhana za hisabati.[63] Kielelezo cha 5 kinaonyesha jinsi watoto wanavyojifunza kuhusu dhana ya nyongeza: kwanza kwa kujifunza kwa uchunguzi kama vile vitofali au vijiti, kisha kwa kutumia mifano ya picha, na hatimaye kwa kutumia alama za kufikirika.

Kutumia nyenzo kuwakilisha dhana dhahania husaidia watoto kufikiri kwa maana zaidi,[64] na ujumuishaji sahihi na wa kimfumo wa nyenzo katika darasa la hisabati unaweza kuwa na matokeo mazuri juu ya ujifunzaji.[65] Matumizi sahihi ya nyenzo yameonyesha kuboresha ujuzi kuanzia kuhesabu hadi kutatua matatizo.[66] Kinyume chake, zikitumiwa isivyofaa, nyenzo zinaweza "kusababisha mfadhaiko au mkanganyiko, na hatimaye kuvuruga hamasa ya wanafunzi na fursa za jumla za kujifunza."[67] Kutoa nyenzo kwa madarasa na walimu bila ufundishaji au mwongozo kuna athari ndogo kwa matokeo ya ujifunzaji.[68]

NYENZO NA MAFUNZO

Walimulazima wafundishwe vizuri katika matumizi sahihi ya nyenzo na wanapaswa kuwa na ujuzi wa jinsi ya kuongoza majadiliano ya kujenga uchunguzi kwa wanafunzi.[69] Muktadha ambao ujuzi wa uchunguzi hutumiwa ndani yake ndio unaounda maana, na mazungumzo na mwingiliano kati ya wanafunzi na mwalimu ndio unaopelekea uelewa.[70] Kupanga kwa uangalifu matumizi ya nyenzo na kujua jinsi nyenzo tofauti zinavyoangaza mawazo muhimu ya kihisabati ni muhimu.[71] Kwa mfano, katika Kielelezo cha 6, wanafunzi wanatumia mirija kusaidia kuelewa dhana ya thamani ya mahali. Wanaweka mirija katika vifurushi vya 10, huku mrija mmoja ukiwakilisha mamoja. Kujifunza kwa uchunguzi huruhusu wanafunzi "kuona" muundo wa mfumo wetu wa nambari na kuelewa kwamba nambari 14, kwa mfano, ni kifungu kimoja cha 10 na 4. Mara baada ya wanafunzi kuelewa dhana hii, hawahitaji tena kutumia mirija ili "kuona" thamani ya mahali na badala yake wanaweza kutumia thamani ya mahali ili kutatua matatizo mapya. Kutumia njia za uchunguzi ili kusaidiauelewa kunahusisha kuandaa somo ambalo linajumuisha maudhui ya hisabati; kubainisha aina ya nyenzo zitakazotumika, iwe za kuonekana (kama vile vihesabio) au mfano wa picha au uwakilishi wa modeli (kama vile mstari wa nambari); na kuelezea jinsi mwalimu atakavyotumia nyenzo na kuwaruhusu watoto kufanya mazoezi. Baadae walimu lazima waamue ni nyenzo ngapi zinahitajika, iwapo zitatumika kwa mmoja mmoja au katika vikundi, jinsi zitakavyosambazwa na kuhifadhiwa, na jinsi watoto watakavyoongozwa katika matumizi yake. Utafiti unaonyesha kwamba watoto wanapopata mwongozo wa jinsi ya kutumia nyenzo ipasavyo, wanapata matokeo bora ya kujifunza.[72] Ili kuwasaidia walimu vizuri katika suala hili, ni muhimu kuwapa miongozo ambayo inaelezea jinsi ya kutumia nyenzo fulani kufundisha maudhui mahususi ya hisabati ambayo hutoa msaada kwa kuyapanga maudhui na nyenzo.[73, 74]

KIELELEZO CHA 5. Kujifunza kuhusu kujumlisha kwa kutumia mbinu za uchunguzi, picha, na kisha alama



Nyenzo zinaweza kupatikana katika eneo husika na kwa bei nafuu (kama vile vizibo vya chupa, mbegu, na changarawe kama vihesabio). Ingawa walimu wanaweza kukusanya na kutengeneza nyenzo wenyewe, kuna ushahidi fulani kwamba kuwapa nyenzo wanazohitaji kunaweza kusaidia kuhakikisha kuwa zinafaa, ni nyingi, na zina uwezekano wa kutumiwa.[75] Inapaswa pia kutambuliwa kuwa kuweka nyenzo mbalimbali kwa idadi inayoweza kudhibitiwa husaidia kupunguza mzigo kwa walimu wa kukusanya mbinu tofauti na vitu mbalimbali vya uchunguzi na kupunguza idadi ya mbinu mpya za kufundishia ambazo walimu wanahitajika kuzijua.[76] Kielelezo cha 7 kinaonyesha nyenzo za kuhesabia zinazopatikana na thamani ya nambari nchini Malawi na Ghana.

NYENZO ZA KUFUNDISHIA NA KUJIFUNZIA KATIKA LMICS

Nyenzo za kufundishia na kujifunzia katika madarasa ya hisabati ya darasa la awali ni muhimu. Zinasaidia watoto wadogo kujenga dhana kama vile thamani ya nambari, kujumlisha, na kuzidisha kuwa halisi zaidi. Kutumia nyenzo kuwakilisha dhana dhahania husaidia watoto kufikiri kwa mantiki zaidi,[77] na ujumuishaji sahihi na wa kimfumo wa nyenzo katika darasa la hisabati unaweza kuwa na matokeo mazuri juu ya ujifunzaji.[78] Katika LMICs, vitabu vya kiada na nyenzo za kujifunzia mara nyingi ni chache, na watoto wanalazimika kutumia rasilimali pamoja.[79] Katika Afrika Kusini mwa Jangwa la Sahara, kwa wastani, wanafunzi watatu wanatumia kitabu kimoja cha hisabati; nchini Cameroon hasa, kwa wastani, wanafunzi 14 wanatumia kitabu kimoja cha hisabati.[80] Katika ripoti ya kwanza ya Global Book Fund, ambayo iliangalia nyenzo za kufundishia na kujifunzia katika nchi 13 zinazoendelea katika Karibiani, Afrika Kusini mwa Jangwa la Sahara, Bara la Hindi, na Asia Kusini Mashariki, ni nchi tatu tuzilizotoa zaidi ya vitabu vya msingi vya kiada na miongozo ya walimu. Kwa kuongezea, hakuna nchi yoyote iliyofanyiwa utafiti iliyofikia au kudumisha malengo yao ya msingi, hata kwa usambazaji wa vitabu vya kiada na miongozo ya walimu. Zaidi ya hayo, data zinaonyesha kwamba serikali katika nchi za kipato cha chini na kati (LMIC) mara nyingi huweka kipaumbele katika vitabu vya masomo vya daraja la pili badala ya vitabu vya daraja la msingi, na vitabu vya daraja la juu badala ya vitabu vya daraja la chini.[81]

Madarasa mengi ya LMIC yana nyenzo chache kando na vitabu vya kiada. Ingawa ni nadra kuona darasa lenye maktaba, ni nadra zaidi kuona nyenzo za hisabati darasani. Save the Children, kama sehemu ya Afua yake ya Kuongeza Hesabu, hutoa "nyenzo za hisabati" kwa kila darasa ambako inafanya kazi (tazama Kielelezo cha 8). Nyenzo hizi ni pamoja na miamba, vifurushi vya mirija, na vitu vingine vya kupanga na kuhesabu, pamoja na mwongozo wa walimu kuhusu jinsi ya kuvitumia. Kabla ya kupokea vifaa hivi, shule zinazoshiriki katika mpango wa Kukuza Hesabu nchini Bangladesh, El Salvador, Malawi, na Pakistan hazikuwa na vifaa vya hisabati.[82]

KIELELEZO CHA 8. Nyenzo za Kukuza Hesabu zinazotumia zana zilizopatikana katika eneo husika

Utafiti juu ya matumizi ya nyenzo na walimu katika LMICs ni mdogo sana. Ushahidi uliopo unaonyesha ukosefu wa muda wa kutosha wa mafunzo na mbinu ambayo hairuhusu walimu kutafakari juu ya mazoezi na kujadili matumizi halisi ya nyenzo katika madarasa. Hii huzuia walimu kutumia nyenzo darasani, na kusababisha kufundisha kwa njia ambazo wanazifahamu zaidi[83] na kutuimia nyenzo kwa ajili ya maonyesho tu wakati watoto wanatazama tu.[84] Walimu pia wanahusisha matumizi ya nyenzo kama kitu "cha ziada" au nje ya mtaala.[85] Kwa kuongezea, sababu kama vile saizi ya darasa kubwa na kuhama mara mbili kunaweza kuwaacha walimu wengi wakiwa na muda mfupi wa kujiandaa kwa ajili ya kufundisha darasani, ikiwa ni pamoja na maandalizi ya nyenzo.[86] Jaribio la uchunguzi nchini Ghana lilitoa mazoezi ya kuhesabu yaliyopangwa kutekeleza kwa watoto wa miaka sita na saba.[87] Baadhi ya walimu walipewa nyenzo zote zinazohitajika kutekeleza shughuli hizi, wakati walimu wengine waliombwa kuzitengeneza au kuzikusanya. Walimu waliopokea nyenzo zote zinazohitajika kwa somo walikuwa na uwezekano mkubwa wa kutumia shughuli zilizotolewa kwao na uwezekano mkubwa wa kutumia mikakati ya kufundisha yenye athari kubwa ikilinganishwa na kundi jingine.

MBINU YA UFUNDISHAJI WA MUUNDO WA FUNDA WANDE

Katika mpango wa hisabati wa Funda Wande, Bala Wande, walimu wanapokea mwongozo wa mwalimu ambao unaweka malengo ya somo la kila siku na kila wiki na unaonyesha aina ya shughuli za kufundishia na kujifunzia zinazohitajika ili kufikia malengo ya ujifunzaji, pamoja na jinsi ya kujumuisha mbinu za ujanja katika somo na aina ya tathmini ya kutumia kwa mada fulani inayofundishwa. Video za walimu wakuu wanaofundisha maudhui hutoa ufungaji wa ziada na msaada kwa walimu, na sehemu ya maendeleo ya dhana inaelezea dhana ya hisabati inayolengwa katika shughuli za kufundisha darasa zima, msamiati ambao walimu wanapaswa kutumia, na tabia mahususi zinazohusiana na hisabati wanazopaswa kuzingatia wanafunzi wanapoendelea na dhana zinazolengwa.[74]

KIELELEZO CHA 7. Mbinu za uchunguzi wa hesabu za eneo husika nchini Malawi na Ghana

MAPENDEKEZO

- **Hakikisha kuwa kuna kiwango cha chini cha nyenzo za kufundishia na kujifunzia katika kila darasa ambacho kinajumuisha kitabu cha kiada kwa kila mwanafunzi na mwongozo wa mwalimu kwa kila mwalimu.** Mwongozo wa mwalimu unapaswa kujumuisha maelekezo ya kuunganisha masomo na nyenzo na kuelezea jinsi ya kutumia nyenzo. Angalia mwongozo wa jinsi ya kufanya wa majadiliano ya ziada ya hili katika kanuni za ufundishaji juu ya [Uandaaji wa Nyenzo za Kufundishia na Kujifunzia].
- **Wape madarasa yote vifaa vya uchunguzi wa kujifunza kwa ajili ya matumizi ya wanafunzi.** Kifaa cha nyenzo za hisabati cha ndani ya eneo husika ni sehemu muhimu ya darasa la awali la hisabati. Vifaa vinapaswa kuzingatia nyenzo chache za kiwango cha juu ambavyo vinaweza kutumika kwa dhana na mada nyingi, na lazima vijumuishe nyenzo za kutosha kwa watoto wote kutumia katika vikundi vidogo.
- **Kuhakikisha kuwa walimu wana mafunzo ya kutosha, modeli, na mazoezi ya jinsi ya kutumia nyenzo za kufundishia na kujifunzia ipasavyo.** Nyenzo zitakazotumika darasani lazima ziwe na mafunzo na msaada ambao unazingatia jinsi ya kuchagua nyenzo sahihi kwa ajili ya somo linalofundishwa, jinsi nyenzo zinavyoweza kushirikishwa katika vikundi vidogo, na jinsi nyenzo zinavyopaswa kutunzwa na kuhifadhiwa. Mafunzo yanapaswa kujumuisha modeli inayofaa na onyesho la mkufunzi maalumu wa hisabati, na fursa ya kutosha ya kufanya mazoezi. Tazama mwongozo wa kanuni za ufundishaji kwenye [Maendeleo ya Kitaalamu ya Mwalimu: Mafunzo ya Mwalimu] kwa majadiliano zaidi ya kuingiza modeli na mazoezi katika mafunzo.

Hitimisho

Watunga sera, wafadhili, na watekelezaji wanapaswa kutambua umuhimu wa kisomo cha awali na kuhesabu kama mada za msingi, na wanapaswa kusisitiza kila moja kwa usawa. Kuzingatia usomaji wa darasa la awali kumezalisha udhamini na utafiti juu ya mazoea ya kuahidi kusaidia maendeleo ya kisomo katika LMICs, ambayo imeboresha uelewa wa sekta ya mifano ya mafanikio ya utekelezaji na mbinu za kuboresha matokeo ya kisomo kwa kiwango kikubwa; kazi kama hiyo ni muhimu kuelewa vizuri kile kinachofanya kazi ili kuimarisha ujuzi wa hisabati katika muktadha huu. Hatua zaidi za hisabati za awali ambazo zimepangwa vizuri, zilizoundwa kwa kushirikiana na serikali za nchi mwenyeji, na kulingana na utafiti madhubuti zitasaidia kuziba mapengo katika eneo hili linalohusiana na maarifa ya maudhui ya mwalimu, ufundishaji, na matumizi ya nyenzo za kufundishia na kujifunzia. Kuunda kizalishi cha kujaribu mbinu na programu za hesabu zilizofanikiwa zilizotengenezwa katika LMIC mbalimbali kunaweza kuwa mwanzo wa kuzalisha taarifa zaidi juu ya kile kinachofanya kazi katika elimu ya hesabu za awali.

Serikali lazima itimize jukumu lake kuhakikisha kiwango cha chini cha vifaa vya kufundishia na kujifunzia darasani, kuanza na kila mtoto akiwa na kitabu chake cha kujifunzia. Wakufunzi wa hisabati na watungaji wa mtaala katika LMICs wanapaswa kuwasaidia watunga sera na maafisa wa serikali kuelewa kwamba watoto katika madarasa ya awali wanakuza uelewa wao wa hisabati kupitia maendeleo thabiti ya kifikra na kwamba nyenzo za kufundishia na kujifunzia husaidia kuimarisha uelewa wa wanafunzi wa dhana dhahania. Kutumia nyenzo za hisabati zilizoundwa ndani ya nchi si kutasaidia kujifunza hisabati lakini pia kuwaonyesha watoto kwamba hisabati ni kitu ambacho kinatuzunguka.

Ingawa haijajadiliwa hapa kwa kina, **mitazamo ya kijinsiakuhusu hesabu ni "ya nani," pamoja na mitazamo ya walimu kuhusu nani "aliye vizuri" katika hisabati, lazima ishughulikiwe na jumuiya ya kimataifa. Mitazamo kama hiyo inazuia wasichana kufanya maendeleo katika kazi zinazohusiana na hisabati na STEM, na juhudi zaidi zinapaswa kufanywa ili kubadilisha tamaduni hizi.**

Yafuatayo ni baadhi ya mada zinazostahili utafiti zaidi katika LMICs:

- Mada za awali za hisabati ambazo walimu wanapata shida kufundisha kwa ufanisi
- Mikakati bora zaidi ya kufundisha ili kuongeza uelewa wa dhana ya maudhui ya hisabati
- Matumizi ya vifaa vya kufundishia na kujifunzia darasani
- Mtaala wa hesabu wa wakati wa utumishi na kabla ya utumishi na mbinu za mafunzo
- Uzoefu wa mazoezi ya kabla ya utumishi katika hesabu za awali
- Mitazamo kuhusu hesabu miongoni mwa wanafunzi, walimu, familia na wanajamii

RASILIMALI

Utafiti wa maandiko wa B. Atweh, M. Graven, na H. Venkat ambao unashughulikia maendeleo ya hesabu katika miaka ya awali ya utoto na shule katika muktadha wa nchi za kipato cha chini:
https://www.academia.edu/21205934/Teaching_Numeracy_in_Pre_School_and_Early_Grades_in_Low_Income_Countries_GIZ_report_Atweh_Bose_Graven_Subraniam_and_Venkat

Andiko la Mtandao wa Kusoma Ulimwenguni kwa wadau wanaohusika katika kubuni, kutekeleza, au kusimamia mipango ya kisomo cha awali na hesabu: https://www.globalreadingnetwork.net/resources/towards-design-and-implementation-comprehensive-primary-grade-literacy-and-numeracy

Majadiliano ya kina ya mikakati minne ya kufundisha ambayo ni muhimu kwa ufundishaji bora wa hisabati:
https://shared.rti.org/content/instructional-strategies-mathematics-early-grades

Masomo mengi kutoka LMIC juu ya matumizi ya mikakati ya kawaida ya kufundishia katika madarasa ya awali ya hesabati: https://files.eric.ed.gov/fulltext/ED586780.pdf

"Bala Wande: Kuhesabu kwa Kujiamini," programu ya hisabati ya darasa la awali iliyoundwa na wataalamu wa hisabati nchini Afrika Kusini, ikiwa na maudhui ya lugha mbili: https://fundawande.org

"Kufundisha katika Kiwango Sahihi" ya Pratham, ambayo inawaunganisha wanafunzi kwa mahitaji ya kujifunza na kutoa muda wa kuimarisha ujuzi wa msingi: https://www.teachingattherightlevel.org/

UTAALAMU WA KIUFUNDI UNAHITAJIKA

- **Maudhui ya hisabati ya darasa la awali na utaalamu wa utungaji wa mtaala** kwa ajili ya uwiano wa mitaala ya kitaifa ya kabla ya utumishi na mazoezi ya sasa ya msingi wa ushahidi katika hisabati za darasa la awali na kwa ajili ya utungaji wa nyenzo mahususi za kusaidia mitaala hii
- **Utaalamu wa ufundishaji wa walimu wa Hisabati** kwa ajili ya kuimarisha mipango ya maendeleo ya kitaaluma kwa wahadhiri wa kabla ya utumishi ililenga kubuni mbinu za ufundishaji zinazotegemea ushahidi wa hisabati za darasa la awali
- **Utaalamu unaohusiana na ushirikiano kati ya shule na mipango ya mafunzo ya kabla ya huduma,** ikiwa ni pamoja na maendeleo ya mipango ya mazoezi yenye athari kubwa ambayo ni pamoja na fursa kwa walimu kufundisha masomo ya hisabati na kupokea maoni ya kujenga
- **Utaalamu unaohusiana na maendeleo endelevu ya kitaalamu kwa ufundishaji wa hisabati,** ikiwa ni pamoja na matumizi ya teknolojia na mafunzo mchanganyiko ili kusaidia maendeleo ya mwalimu kwa ufanisi

Hati hii imepewa leseni chini ya Leseni ya Kimataifa ya Hatimiliki Inayoruhusu Umma Kunakili, Kusambaza, na Kuboresha Maudhui Jinsi Wapendavyo 4.0.
https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/

WAANDISHI

Shirin Lutfeali, Dkt. Yasmin Sitabkhan, Dkt. Wendi Ralaingita, na Dkt. Benjamin Piper

MAELEZO YA MWISHO

1 C. Tredoux and A. Dawes, *Predictors of Mathematics and Literacy Skills at 15 Years Old in Ethiopia, India, Peru and Vietnam: A Longitudinal Study* (London: Young Lives, 2018).

2 G. J. Duncan, C. J. Dowsett, A. Claessens, et al., "School Readiness and Later Achievement," *Developmental Psychology* 43, no. 6 (2007): 1428–1446.

3 Institute of Education Sciences, *Teaching Math to Young Children: Educator's Practice Guide* (Washington, DC: US Department of Education, National Center for Education Evaluation and Regional Assistance, 2013).

4 S. Cueto, J. León, M. Sorto, and A. Miranda, "Teachers' Pedagogical Content Knowledge and Mathematics Achievement of Students in Peru," *Educational Studies in Mathematics* 94, no. 3 (2017); E. A. Hanushek, G. Schwerdt, and L. W. Widerhold, "Returns to Skills around the World: Evidence from PIAAC 2014," *European Economic Review* 73 (2014): 103–130.

5 N. Evans, D. Srikantaiah, A. Pallangyo, et al., "Towards the Design and Implementation of Comprehensive Primary Grade Literacy and Numeracy Programs," Global Reading Network Working Paper (Washington, DC: USAID, 2019).

6 R. Slaby, S. Loucks, and P. Stelwagon, "Why Is Preschool Essential in Closing the Achievement Gap?," *Educational Leadership and Administration* 17 (2005): 47–57.

7 N. Jordan, D. Kaplan, C. Ramineni, and M. Locuniak, "Early Math Matters: Kindergarten Number Competence and Later Mathematics Outcomes," *Developmental Psychology* 45, no. 3 (2009): 850–867.

8 P. Fisher, J. Dobbs-Oates, G. Doctoroff, and D. Arnold, "Early Math Interest and the Development of Math Skills," *Journal of Educational Psychology* 104, no. 3 (2012): 673–681.

9 P. L. Morgan, G. Farkas, and Q. Wu, "Five-Year Growth Trajectories of Kindergarten Children with Learning Difficulties in Mathematics," *Journal of Learning Disabilities* 42 (2009): 306–321.

10 UNICEF and International Telecommunication Union, *Towards an Equal Future: Reimagining Girls' Education through STEM* (New York: UNICEF, 2020).

11 RTI International *Ghana 2015: Early Grade Reading Assessment and Early Grade Mathematics Assessment: Report of Findings* (Washington, DC: USAID), https://ierc-publicfiles.s3.amazonaws.com/public/resources/Ghana%202015%20EGRA-EGMA_22Nov2016_FINAL.pdf.

12 PAL Network, ICAN: *International Common Assessment of Numeracy; Background, Features and Large-Scale Implementation* (Nairobi: People's Action for Learning Network, 2020).

13 RTI International, *Assistance to Basic Education: All Children Reading (ABE-ACR): Final Findings Report, Tanzania National Early Grade Reading Assessment (EGRA)* (Washington, DC: USAID, 2016), https://www.globalreadingnetwork.net/resources/2016-tanzania-national-egra-egma-ssme-life-skills-findings-report.

14 G. Bethell, *Mathematics Education in Sub-Saharan Africa: Status, Challenges and Opportunities* (Washington, DC: World Bank, 2016).

15 World Bank, *World Development Report* (Washington, DC: World Bank, 2018).

16 ASER Centre, *Annual Status of Education Report (Rural)* (2019), http://img.asercentre.org/docs/ASER%202018/Release%20Material/aserreport2018.pdf.

17 E. Ghasemi and H. Burley, "Gender, Affect, and Math: A Cross-National Meta-Analysis of Trends in International Mathematics and Science Study 2015 Outcomes," *Large-Scale Assessments in Education* 7, no. 10 (2019).

18 B. Atweh, M. Graven, and H. Venkat, *Teaching Numeracy in Pre-school and Early Grades in Low Income Countries* (Bonn: GIZ, 2014).

19 Institute of Education Sciences, *Teaching Math to Young Children*, 2013.

20 Evans et al., "Towards the Design and Implementation," 2019.

21 R. A. Schmidt and R. A. Bjork, "New Conceptualizations of Practice: Common Principles in Three Paradigms Suggest New Concepts for Training," *Psychological Science* 3 (1992): 207–217.

22 L. K. Son and D. A. Simon, "Distributed Learning: Data, Metacognition, and Educational Implications," *Educational Psychology Review* 24 (2012).

23 D. Clements and J. Sarama, *Early Childhood Mathematics Education Research: Learning Trajectories for Young Children* (New York: Routledge, 2009).

24 National Association for the Education of Young Children and National Council of Teachers of Mathematics, "Early Childhood Mathematics: Promoting Good Beginnings," joint position statement (2010), https://www.naeyc.org/sites/default/files/globally-shared/downloads/PDFs/resources/position-statements/psmath.pdf.

25 National Council of Teachers of Mathematics, "Focusing on Multiplication and Division" (2010), https://www.nctm.org/Handlers/AttachmentHandler.ashx?attachmentID=9oj%2BMYeR0tY%3D.

26 National Research Council, *Adding It Up: Helping Children Learn Mathematics* (Washington, DC: National Academies Press, 2001).

27 National Council of Teachers of Mathematics, *Procedural Fluency in Mathematics: A Position of the National Council of Teachers of Mathematics* (Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, 2014).

28 E. Gray and D. Tall, "Duality, Ambiguity, and Flexibility: A 'Proceptual' View of Simple Arithmetic," *Journal for Research in Mathematics Education* 25, no. 2 (1994): 116–140.

29 D. Clements and J. Sarama, "Early Childhood Mathematics Intervention," *Science* 333, no. 6045 (2011): 968–970.

30 K. H. Seo and H. P. Ginsburg, “What Is Developmentally Appropriate in Early Childhood Mathematics Education? Lessons from New Research,” in D. Clements and J. Sarama (eds.), *Engaging Young Children in Mathematics* (Mahwah, NJ: Erlbaum Associates Inc., 2004).

31 National Council of Teachers of Mathematics, *Principles and Standards for School Mathematics* (Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, 2000).

32 Evans et al., “Towards the Design and Implementation,” 2019.

33 M. Lampert and P. Cobb, “Communication and Language,” in W. G. Kilpatrick and M. D. Schifter (eds.), *A Research Companion to the Principles and Standards for School Mathematics* (Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, 2003); D. L. Ball, “With an Eye on the Mathematical Horizon: Dilemmas of Teaching Elementary School Mathematics,” *Elementary School Journal* 93, no. 4 (1993): 373–397; J. Hiebert and D. Wearne, “Instructional Tasks, Classroom Discourse, and Learners’ Learning in Second-Grade Arithmetic,” *American Educational Research Journal* 30, no. 2 (1993): 393–425.

34 B. Piper, *Integrated Education Program: Impact Study of SMRS Using Early Grade Reading Assessment in Three Provinces in South Africa* (Washington, DC: USAID, 2009), https://nicspaull.files.wordpress.com/2015/01/piper-2009-egra-south-africa-smrs.pdf; M. Dubeck, M. C. H. Jukes, and G. Okello, “Early Primary Literacy Instruction in Kenya,” *Comparative Education Review* 56, no. 1 (2012): 48–68.

35 L. Pritchett na A. Beatty, "Matokeo mabaya ya mitaala ya ziada katika nchi zinazoendelea," Andiko la Kituo cha Maendeleo ya Kimataifa 293 (2012), https://www.cgdev.org/sites/default/files/1426129_file_Pritchett_Beatty_Overambitious_FINAL_0.pdf.

36 World Bank, *World Development Report*, 2018.

37 S. Kusaka, “Issue Analysis of Competency-Based Mathematics Curriculum Design in African Countries: A Case Study of Mozambique’s Primary Mathematics Education,” *Journal of Education and Learning* 9, no. 1 (2019).

38 National Governors Association Center for Best Practices and Council of Chief State School Officers, *Common Core State Standards for Mathematics* (Washington, DC: National Governors Association Center for Best Practices and Council of Chief State School Officers, 2010).

39 N. Evans and E. Acquaye, “Problematizing the Familiar in Ghana: Can an In-Service Model Based on Authentic Problem-Solving Help Teachers’ Construct Deeper Understandings of New Mathematics Instructional Models?,” paper presented at Comparative and International Education Society 2018 conference, Mexico City.

40 Bethell, *Mathematics Education in Sub-Saharan Africa*, 2016.

41 R. E. Slavin and C. Lake, “Effective Programs in Elementary Mathematics: A Best-Evidence Synthesis,” *American Educational Research Association* 78, no. 3 (2008).

42 J. Boaler, *What's Math Go to Do with It? Helping Children Learn to Love Their Most Hated Subject—and Why It's Important for America* (New York: Viking, 2008); C. O’Connor, S. Michaels, and S. Chapin, “‘Scaling Down’ to Explore the Role of Talk in Learning: From District Intervention to Controlled Classroom Study,” in L. B. Resnick, C. Asterhan, and S. N. Clarke (eds.), *Socializing Intelligence through Talk and Dialogue* (Washington, DC: American Educational Research Association, 2015); E. Naslund-Hadley, S. W. Parker, and J. M. Hernandez-Agramonte, “Fostering Early Math Understanding: Experimental Evidence from Paraguay,” *Global Education Review* 1, no. 4 (2014): 135–154; A. J. H. Boonen, J. Jolles, M. van der Schoot, and F. van Wesel, “The Role of Visual Representation Type, Spatial Ability, and Reading Comprehension in Word Problem Solving: An Item-Level Analysis in Elementary School Children,” *International Journal of Educational Research* 68 (2014): 15–26; J. Woodward, S. Beckmann, M. Driscoll, et al., *Improving mathematical problem solving in grades 4 through 8: Summary of Evidence for Instructional Tips Based on the Educator’s Practice Guide* (Washington, DC: National Center for Education Evaluation and Regional Assistance, Institute of Education Sciences, US Department of Education, 2012); Y. Sitabkhan, J. Davis, D. Earnest, et al., “Instructional Strategies for Mathematics in the Early Grades,” Mathematics Working Group Working Paper (Washington, DC: USAID, 2019), https://shared.rti.org/content/instructional-strategies-mathematics-early-grades.

43 L. Pritchett and R. Banerji, *Schooling Is Not Education: Using Assessment to Change the Politics of Non-learning* (Washington, DC: Centre for Global Development, 2013).

44 Black and William (1998), cited in N. Evans, D. Srikantaiah, A. Pallangyo, et al., “Towards the Design and Implementation of Comprehensive Primary Grade Literacy and Numeracy Programs,” Global Reading Network Working Paper (Washington, DC: USAID, 2019).

45 Atweh et al., *Teaching Numeracy in Pre-school and Early Grades in Low Income Countries*, 2014; D. K. Evans, A. Popova, and V. Arancibia, “Training Teachers on the Job: What Works and How to Measure It,” Policy Research Working Paper No. 7834 (World Bank, 2016).

46 L. Ma, *Knowing and Teaching Elementary Mathematics: Teachers’ Understandings of Fundamental Mathematics in China and the United States* (Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, 1999); J. Pryor, K. Akyeampong, J. Westbrook, and K. Lussier, “Rethinking Teacher Preparation and Professional Development in Africa: An Analysis of the Curriculum of Teacher Education in the Teaching of Early Reading and Mathematics,” *Curriculum Journal* 23, no. 4 (2012): 409–502.

47 H. Hill and D. Ball, “Learning Mathematics for Teaching: Results from California's Mathematics Professional Development Institutes,” *Journal for Research in Mathematics Education* 35, no. 5 (2004): 330–351.

48 T. Bold, D., Filmer, G., Martin, et al., “Enrollment without Learning: Teacher Effort, Knowledge, and Skill in Primary Schools,” *Africa Journal of Economic Perspectives* 31, no. 4 (2017): 185–204.

49 Metzler and Woessmann (2012), cited in B. Bruns and J. Luque, *Great Teachers: How to Raise Student Learning in Latin America and the Caribbean* (Washington, DC: World Bank, 2018), p. 77.

50 K. Akyeampong, “Teacher Educators’ Practice and Vision of Good Teaching in Teacher Education Reform Context in Ghana,” *Educational Researcher* 46, no. 4 (2017); Pryor et al., “Rethinking Teacher Preparation,” 2012; Bold et al., “Enrollment without Learning,” 2017.

51 Inter-American Development Bank, *All Children Count* (Washington, DC: Inter-American Development Bank, 2015).

52 L. M. Kaino, M. G. Ngoepe, M. M. Phoshoko, et al., “Some Trends in Mathematics Professional Development in Selected Developing and Developed Countries: An Insight into Post-Apartheid South Africa” (University of South Africa, 2014), https://directorymathsed.net/montenegro/Kaino.pdf.

53 F. Hardman, J. Hardman, C. Agg, et al., "Changing Pedagogical Practice in Kenyan Primary Schools: The Impact of School-Based Training," *Comparative Education* 45, no. 1 (2009).

54 Nag et al. (2014), cited in B. Atweh, M. Graven, and H. Venkat, *Teaching Numeracy in Pre-school and Early Grades in Low Income Countries* (Bonn: GIZ, 2014).

55 B. Bruns and J. Luque, *Great Teachers: How to Raise Student Learning in Latin America and the Caribbean* (Washington, DC: World Bank, 2018).

56 Jorgensen et al. (2010), cited in B. Atweh, M. Graven, and H. Venkat, *Teaching Numeracy in Pre-school and Early Grades in Low Income Countries* (Bonn: GIZ, 2014).

57 Pryor et al., "Rethinking Teacher Preparation," 2012.

58 Evans and Acquaye, "Problematizing the Familiar in Ghana," 2018.

59 Pryor et al., "Rethinking Teacher Preparation," 2012.

60 Akyeampong, "Teacher Educators' Practice and Vision of Good Teaching," 2017, p. 16.

61 Sitabkhan et al., "Instructional Strategies," 2019.

62 Bethell, *Mathematics Education in Sub-Saharan Africa*, 2016.

63 Sitabkhan et al., "Instructional Strategies," 2019.

64 M. K. Stein and J. W. Bovalino, "Manipulatives: One Piece of the Puzzle," *Mathematics Teaching in Middle School* 6, no. 6 (2001): 356–360.

65 P. Swan and L. Marshall, "Revisiting Mathematics Manipulative Materials," *Australian Primary Mathematics Classroom* 15, no. 2 (2010): 13–19.

66 Clements (1999), cited in N. Evans, D. Srikantaiah, A. Pallangyo, et al., "Towards the Design and Implementation of Comprehensive Primary Grade Literacy and Numeracy Programs," Global Reading Network Working Paper (Washington, DC: USAID, 2019).

67 R. S. Liggett, "The Impact of Use of Manipulatives on the Math Scores of Grade 2 Students," *Brock Education Journal* 26, no. 2 (2017): 88.

68 Evans et al., "Towards the Design and Implementation," 2019.

69 D. H. Clements, "'Concrete' Manipulatives, Concrete Ideas," *Contemporary Issues in Early Childhood* 1 no. 1 (1999): 45–60.

70 D. L. Ball, "Magical Hopes: Manipulatives and the Reform of Math Education," *American Educator: The Professional Journal of the American Federation of Teachers* 16, no. 2 (1992): 14–18, 46–47.

71 Sitabkhan et al., "Instructional Strategies for Mathematics in the Early Grades," 2019.

72 K. J. Carbonneau, S. C. Marley, and J. P. Selig, "A Meta-Analysis of the Efficacy of Teaching Mathematics with Concrete Manipulatives," *Journal of Educational Psychology* 105, no. 2 (2013): 380–400.

73 Inter-American Development Bank, *All Children Count*, 2015; B. Piper, W. Ralaingita, L. Akach, and S. King, "Improving Procedural and Conceptual Mathematics Outcomes: Evidence from a Randomised Controlled Trial in Kenya," *Journal of Development Effectiveness* 8, no. 3 (2016): 404–422.

74 N. Evans and M. Alejandra Sorto, Desk Review: Bala Wande Grade 1 Teacher Guide and Learner Activity Book, https://fundawande.org/img/cms/news/Funda Wande_Maths Report.pdf.

75 Sitabkhan et al., "Instructional Strategies for Mathematics in the Early Grades," 2019.

76 B. Piper, Y. Sitabkhan, and E. Nderu, "Mathematics from the Beginning: Evaluating the Tayari Pre-Primary Program's Impact on Early Mathematic Skills," *Global Education Review* 5, no. 3 (2018): 57–81.

77 Stein and Bovalino, "Manipulatives: One Piece of the Puzzle," 2001.

78 Swan and Marshall, "Revisiting Mathematics Manipulative Materials," 2010.

79 F. Yuan and D. Evans, "The Working Conditions of Teachers in Low and Middle Income Countries," working paper (Washington, DC: World Bank, 2018), https://riseprogramme.org/sites/default/files/inline-files/Yuan.pdf.

80 UNESCO, *School Resources and Learning Environments in Africa: Key Results from a Regional Survey on Factors Affecting Quality of Education* (Paris: UNESCO, 2016).

81 N. Read, *Measures of Learning and Teaching Material Availability and Use in Sub-Saharan Africa and Other Low Income Countries* (Paris: UNESCO, 2016).

82 S. Lutfeali, Save the Children field observation visits, 2013–2019.

83 K Akyeampong, "Teacher Educators' Practice and Vision of Good Teaching," 2017.

84 D. Phuntsho, *Investigating Bhutanese Mathematics Teachers' Beliefs and Practices in the Context of Curriculum Reform*, PhD thesis, Queensland University of Technology (2016), https://eprints.qut.edu.au/95624/1/Phuntsho_Dolma_Thesis.pdf.

85 RTI International, *Education Data for Decision Making (EdData II): National Early Grade Literacy and Numeracy Survey–Jordan* (Washington, DC: USAID, 2015), https://shared.rti.org/content/education-data-decision-making-eddata-ii-national-early-grade-literacy-and-numeracy-survey.

86 Yuan and Evans, "The Working Conditions of Teachers in Low and Middle Income Countries," 2018.

87 Y. Sitabkhan and K. Ampadu, *Shifting Teacher Practices in Ghana: A Case Study* (2021). .