



Diseño de programas de aritmética efectivos en países de bajos y medianos ingresos

Introducción

La aritmética ha recibido escasa atención en las discusiones en torno a la calidad escolar en los primeros grados, a pesar de la evidencia de que las habilidades matemáticas tempranas sólidas no solo predicen el rendimiento académico posterior,¹ sino que también pueden predecir las habilidades de lecto-escritura,² lo que justifica dedicar el mismo tiempo a las habilidades matemáticas y de lecto-escritura desde el principio.³ El rendimiento temprano en matemáticas está relacionado con los resultados posteriores en la vida, incluida la graduación de la escuela secundaria y el potencial de ingresos.⁴ Con la proliferación de la tecnología y las carreras relacionadas con ciencias, tecnología, ingeniería y matemáticas, y la necesidad de habilidades sólidas en interpretación de datos y resolución de problemas, tener una sólida base temprana en matemáticas tiene implicaciones para las carreras del siglo XXI ahora más que nunca.

PROPÓSITO

En esta guía, ofrecemos sugerencias a los responsables políticos, donantes e implementadores sobre cómo diseñar y gestionar de manera efectiva las competencias básicas en matemáticas a escala. Presentamos la evidencia disponible y relevante de países de altos ingresos y países de bajos y medianos ingresos (low- and middle-income countries, LMIC), y analizamos posibles soluciones a los desafíos en tres áreas: plan de estudios y estándares, maestros y enseñanza, y material didáctico. La guía concluye con un análisis de las áreas donde se necesita más investigación.

IMPORTANCIA DE LA ARITMÉTICA Y DE UN COMIENZO TEMPRANO

Los seres humanos nacen con un sentido numérico innato, y las competencias básicas en matemáticas de los niños pequeños se continúan desarrollando a medida que interactúan con los cuidadores, los objetos cotidianos y su entorno.⁵ Cuando los niños ingresan a la escuela, comienzan a formalizar el conocimiento matemático informal que han desarrollado desde su nacimiento. Por ejemplo, aprenden que los palitos que cuentan y con los que juegan pueden representarse mediante símbolos escritos como “3” y “5”, y que juntar objetos se llama sumar y se asocia con el símbolo “+”. Introducir tempranamente a los niños en el mundo de las matemáticas—desde el nacimiento, pasando por la educación preescolar y con suficiente atención a los primeros grados—puede cerrar las brechas de rendimiento entre niños de diferentes niveles socioeconómicos⁶ y proporcionarles tiempo para dominar áreas básicas como contar y reconocer los números, principios que han demostrado influir en el éxito posterior en matemáticas.⁷ Comenzar tempranamente la educación en matemáticas también fomenta actitudes positivas hacia las matemáticas, lo que, según las investigaciones, mejora los resultados en la escuela primaria y más allá.⁸ Además, la investigación muestra que los niños que tienen dificultades con las competencias básicas en matemáticas tienden a quedarse atrás y les resulta difícil ponerse al día,⁹ lo que subraya la importancia de desarrollar una base sólida desde el principio. **Introducir tempranamente a las niñas en el mundo de las matemáticas y exponerlas a carreras que requieren matemáticas, como ingeniería y medicina, puede tener efectos duraderos en la edad adulta, tiene el potencial de cerrar la brecha salarial de género, y ayuda a reducir las inequidades entre niños y niñas.**¹⁰

DEFINICIONES CLAVE

Aritmética: los conocimientos, destrezas, comportamientos y disposiciones que necesitan los estudiantes para utilizar las matemáticas en una amplia gama de situaciones.

Conocimiento conceptual: comprensión de conceptos, operaciones y relaciones matemáticas.

Fluidez procesal: capacidad para aplicar procedimientos con precisión, eficacia y flexibilidad.

Destrezas de proceso: procesos que los estudiantes utilizan para construir y aplicar las competencias matemáticas, incluyendo la resolución de problemas, el uso del razonamiento y la demostración, la comunicación clara de ideas, la creación de conexiones entre diferentes conceptos y el uso de modelos para representar ideas o conceptos matemáticos.

Sentido numérico: capacidad de pensar de forma flexible y fluida sobre los números, lo que incluye separarlos y unirlos de distintas maneras, calcular mentalmente y relacionar los números con problemas de la vida real.

Material concreto: objetos físicos que se pueden mover y tocar, y que se utilizan de tal manera que el alumno puede percibir algún concepto matemático manipulándolos. Ejemplos: fichas, palitos, formas geométricas, etc.



SITUACIÓN DE LOS RESULTADOS EN ARITMÉTICA EN LOS LMIC

La prioridad concedida a las habilidades de lecto-escritura en los LMIC se ha traducido en una escasez de investigación sobre las matemáticas de los primeros grados en estos países. De la limitada evidencia que existe, gran parte se centra en evaluar los resultados del aprendizaje y el progreso de los niños en la adquisición de competencias básicas. Los datos no son alentadores y sugieren que los niños no están dominando las primeras competencias básicas necesarias para desarrollar conceptos matemáticos más complejos.

- Las tendencias en la evaluación de las matemáticas en los primeros grados de Ghana en 2013 y 2015 muestran que los estudiantes obtienen malos resultados más allá de los elementos más procedimentales y de memoria (identificación de números y operaciones simples de suma/resta).¹¹
- En un distrito de la provincia de Punjab, Pakistán, la Red de acción ciudadana utilizó la herramienta Evaluación Internacional Común de Aritmética para evaluar a los estudiantes de 2o. y 3o. grado. Solo el 32,2 % de estos estudiantes fueron capaces de realizar una serie de tareas básicas de matemáticas (una tarea de orientación espacial, una de reconocimiento de formas, una de medición y una de reconocimiento de números, así como al menos tres operaciones numéricas sencillas).¹²
- En Tanzania, en 2013, solo el 7,9 % de los estudiantes de segundo grado cumplían los parámetros para la suma y la resta al final del año escolar, y las niñas iban rezagadas respecto a los niños (7,3 % frente a 8,5 %).¹³
- Según SACMEQ III realizado en 2007 en 15 países del África subsahariana, el 31 % de los estudiantes de sexto grado están clasificados como incompetentes en el cálculo aritmético; en Zambia, esta proporción se eleva al 67,3 %.¹⁴

ARITMÉTICA Y GÉNERO

Los resultados de las evaluaciones de matemáticas para niñas y niños en los primeros grados muestran que se desempeñan igualmente bien desde el jardín de infantes hasta segundo grado. Sin embargo, a partir de tercer grado, los niños superan a las niñas en matemáticas en muchos países.¹⁵ A medida que los estudiantes ingresan a los grados superiores, la tendencia continúa. Por ejemplo, el Informe anual sobre el estado de la educación de Pratham de 2018 muestra que los niños de 14 a 16 años superan a las niñas en habilidades básicas de división.¹⁶ Estos resultados no indican que los niños sean más aptos para las matemáticas que las niñas. En su lugar, los estereotipos de género que presentan a las matemáticas como una asignatura para varones, así como las actitudes de los maestros sobre quién puede y quién no puede hacer matemáticas, están relacionados con las actitudes y la motivación de las niñas hacia las matemáticas.¹⁷ Estos estereotipos y normas son particularmente fuertes en los LMIC, donde las niñas a menudo reciben un trato diferente y donde tanto los maestros como los padres esperan menos de las niñas que de sus pares masculinos.¹⁸

Plan de estudios y estándares

ÁREAS DE CONTENIDO

Investigaciones recientes sobre planes de estudios de matemáticas efectivos para niños pequeños han encontrado que dedicar tiempo a las áreas y actividades de contenidos básicos puede mejorar el aprendizaje de las matemáticas antes y al principio de la escuela primaria.¹⁹ Los programas de matemáticas tempranas de todo el mundo se centran en cinco dominios del conocimiento matemático (véase la Tabla 1), aunque pueden estar organizados de forma diferente en los distintos países. El Marco de competencia global (Global Proficiency Framework, GPF) para matemáticas—un esfuerzo conjunto entre donantes, expertos en matemáticas tempranas y la comunidad internacional de desarrollo—define los niveles mínimos de competencia que se espera que los estudiantes obtengan al final de 1o. a 9o. grado en estos cinco dominios. El dominio de las destrezas y conceptos de estas áreas de contenido representa el conjunto de conocimientos necesarios para poder aplicar con flexibilidad las matemáticas a la resolución de problemas de la vida cotidiana y de la educación posterior. Por ello, **el GPF puede ser una herramienta útil para los países que están revisando su plan de estudios, ya que establece un nivel mínimo de competencia compartido para las destrezas y conceptos matemáticos.**

TABLA 1. Dominios y constructos matemáticos en la escuela primaria

Dominios	Constructos
Números y operaciones	Números enteros; fracciones; decimales; operaciones; problemas del mundo real; uso del redondeo y la estimación para resolver problemas y comprobar respuestas
Medición	Longitud, capacidad, volumen, área, perímetro; tiempo; moneda, uso de la estimación
Estadística y probabilidad	Gestión de datos; causalidad y probabilidad
Geometría y razonamiento espacial	Propiedades de formas y figuras; construcciones; posición y dirección
Álgebra	Patrones; relaciones y funciones; variación (radio, proporción y porcentaje)



PROGRESIONES DE APRENDIZAJE

Puede considerarse que el aprendizaje de las matemáticas se lleva a cabo a través de progresiones de aprendizaje, en las que la comprensión de un concepto por parte de los niños se desarrolla a través de niveles predecibles de sofisticación.²⁰ Un plan de estudios “en espiral” apoya el desarrollo de los niños a través de estos niveles en cada dominio y les ayuda a desarrollar una comprensión profunda de las matemáticas. En un plan de estudios “en espiral”, el aprendizaje dentro de un dominio está repartido y los conceptos se repasan repetidamente a lo largo de meses y en todos los grados. Los estudiantes reciben el andamiaje para alcanzar niveles más altos de comprensión repasando un concepto particular en múltiples ocasiones, lo que conduce a un mejor aprendizaje a largo plazo y fomenta una mayor sofisticación del pensamiento matemático.²¹ En una revisión de la literatura sobre los beneficios de la espiral en comparación con la “masificación”, en la que se aborda un tema en un período de tiempo prolongado sin interrupciones ni repaso posterior, Son y Simon²² concluyen que la espiral conduce a un mejor desempeño. Por ejemplo, en lo que respecta a la suma, los niños aprenden primero a sumar números de un solo dígito (como $4 + 5$ y $2 + 3$) y vuelven a ese concepto varias veces a lo largo del año, cada vez con mayor complejidad (p. ej., primero suman $4 + 5$ con objetos, luego con símbolos y más tarde con problemas escritos). La suma básica como competencia fundamental es clave para desarrollar la destreza más compleja de sumar números de varios dígitos, como $34 + 65$ y $206 + 329$. A través de experiencias y prácticas repetidas, los estudiantes logran el dominio y la fluidez en dichas competencias básicas clave.

La secuenciación de las habilidades matemáticas y cómo se enseña cada destreza en relación con las demás ha sido objeto de numerosas investigaciones.²³ Una declaración conjunta de la Asociación Nacional para la Educación de Niños Pequeños y el Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas establece que “articular metas y estándares para niños pequeños como un continuo de desarrollo o aprendizaje es una estrategia particularmente útil para garantizar el involucramiento y el dominio de importantes ideas matemáticas”.²⁴ Las progresiones de aprendizaje desarrolladas por los investigadores trazan la secuencia en la que los niños pequeños desarrollan la comprensión y las habilidades matemáticas y son una herramienta útil para los planificadores de planes de estudios a la hora de establecer estándares y desarrollar planes de estudios (véase la Figura 1). Un marco de progresiones de aprendizaje ayuda a los maestros a proporcionar estrategias adecuadas para el desarrollo en sus aulas y a proporcionar apoyo adaptado a cada niño, ya que no todos los niños se encontrarán en el mismo punto de su aprendizaje de matemáticas al mismo tiempo. El GPF es un ejemplo de contenido secuenciado según progresiones de aprendizaje documentadas.

CONSTRUCCIÓN DE LAS COMPETENCIAS MATEMÁTICAS

CONOCIMIENTO CONCEPTUAL Y PROCEDIMENTAL

La competencia en cada dominio matemático requiere un sólido conocimiento conceptual, fluidez procesal y destrezas de proceso. El conocimiento conceptual o “comprensión de los conceptos, operaciones y relaciones matemáticas”,²⁶ la fluidez

FIGURA 1. Progresión de aprendizaje para desarrollar la comprensión de la suma y la resta²⁵

1o. grado – Los estudiantes harán lo siguiente:	2o. grado – Los estudiantes harán lo siguiente:	3o. grado – Los estudiantes harán lo siguiente:
<p>Utilizar la suma y la resta con números inferiores a 20 para resolver problemas escritos que involucren situaciones de sumar, restar, unir, separar y comparar (p. ej., utilizando objetos, dibujos y ecuaciones).</p> <p>Resolver problemas escritos que requieran la suma de tres números enteros cuya suma sea menor o igual que 20 (p. ej., utilizando objetos, dibujos y ecuaciones).</p> <p>Aplicar las propiedades conmutativa y asociativa de la suma a las operaciones como estrategias para sumar y restar.</p> <p>Sumar y restar hasta 20, demostrando fluidez para la suma y resta hasta 10.</p> <p>Comprender el significado del signo igual y determinar si las ecuaciones que involucran sumas y restas son verdaderas o falsas.</p> <p>Sumar hasta 100, incluyendo la suma de un número de dos dígitos y un número de un dígito, y la suma de un número de dos dígitos y un múltiplo de 10, utilizando modelos concretos o dibujos y estrategias basadas en el valor posicional, las propiedades de las operaciones y la relación entre la suma y la resta; relacionar la estrategia con un método escrito.</p> <p>Restar múltiplos de 10 en el intervalo 10–90 de múltiplos de 10 en el intervalo 10–90, utilizando modelos concretos o dibujos y estrategias basadas en el valor posicional, las propiedades de las operaciones y la relación entre la suma y la resta; relacionar la estrategia con un método escrito.</p>	<p>Utilizar la suma y la resta hasta 100 para resolver problemas escritos de uno y dos pasos que involucren situaciones de sumar, restar, unir, separar y comparar (p. ej., utilizando dibujos y ecuaciones).</p> <p>Sumar y restar con fluidez hasta 20 utilizando estrategias mentales. Al final de 2o. grado, saber de memoria todas las sumas de dos números de un dígito.</p> <p>Sumar y restar con fluidez hasta 100 utilizando estrategias basadas en el valor posicional, las propiedades de las operaciones y la relación entre la suma y la resta.</p> <p>Sumar hasta cuatro números de dos dígitos utilizando estrategias basadas en el valor posicional y las propiedades de las operaciones.</p> <p>Sumar y restar hasta 1000, utilizando modelos concretos o dibujos y estrategias basadas en el valor posicional, las propiedades de las operaciones y la relación entre la suma y la resta; relacionar la estrategia con un método escrito.</p> <p>Sumar mentalmente 10 o 100 a un número dado en el intervalo 100–900, y restar mentalmente 10 o 100 de un número dado en el intervalo 100–900.</p> <p>Explicar por qué funcionan las estrategias de suma y resta, utilizando el valor posicional y las propiedades de las operaciones.</p>	<p>Sumar y restar con fluidez hasta 1000 utilizando estrategias y algoritmos basados en el valor posicional, las propiedades de las operaciones y la relación entre la suma y la resta.</p>

procesal o “capacidad para aplicar procedimientos con precisión, eficiencia y flexibilidad”²⁷ y las destrezas de proceso están entrelazados y son todos necesarios para construir la competencia. La investigación muestra que **los niños que utilizan estrategias de cálculo basadas en una comprensión conceptual del sistema numérico obtienen mejores resultados en las evaluaciones de aritmética que los estudiantes que se limitan a memorizar**.²⁸ Cada vez que se introduce un nuevo concepto, independientemente del grado, es esencial desarrollar esta comprensión conceptual. Al mismo tiempo, la fluidez procesal es crucial tanto para reforzar conceptos previos como para aprender conceptos nuevos. Considere, por ejemplo, a los jóvenes estudiantes que aprenden a sumar números de un solo dígito. Como parte del aprendizaje de la suma básica, los estudiantes aprenden la propiedad conmutativa—es decir, que $3 + 4$ es lo mismo que $4 + 3$. Este conocimiento conceptual ayuda entonces a fortalecer la fluidez procesal en la suma básica al reducir a la mitad la cantidad de problemas que necesitan saber de forma rápida y sencilla. Esta fluidez, a su vez, les permite aplicar lo que saben para sumar números de dos dígitos como $23 + 24$.

DESTREZAS DE PROCESO

Las destrezas de proceso son los procesos que los estudiantes utilizan para construir y aplicar la competencia matemática. A medida que los niños pequeños desarrollan destrezas de proceso, son capaces de participar en matemáticas más complejas.²⁹ Estas destrezas de proceso se construyen y apoyan involucrando a los niños en actividades matemáticas diversas y desafiantes que requieren un pensamiento de orden superior.³⁰ El Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas define las siguientes destrezas de proceso, que se ilustran en la Figura 2:

- resolver problemas abstractos y de la vida real y construir conocimiento matemático a través de la resolución de problemas
- el reconocimiento y el uso del razonamiento y la demostración como aspectos fundamentales de las matemáticas
- comunicar ideas matemáticas de forma clara y coherente
- el reconocimiento y el uso de las conexiones entre ideas matemáticas y entre las matemáticas y otras disciplinas
- el uso de representaciones para modelar e interpretar conceptos matemáticos³¹

A su vez, apoyar el desarrollo de las destrezas de proceso ayuda a los niños a adquirir fluidez conceptual y procesal, y muchas de las destrezas de proceso funcionan juntas. Por ejemplo, las discusiones en el aula en las que los estudiantes explican su pensamiento y consideran múltiples estrategias posibles para resolver un problema les brindan la oportunidad de practicar la aplicación del razonamiento y la demostración, así como de comunicar ideas matemáticas. Esta “charla matemática” en el aula, que exige tareas complejas para que los niños resuelvan y preguntas de sondeo de los maestros, conduce al desarrollo de una comprensión y una competencia³² más profundas. La Figura 3 ofrece un ejemplo de preguntas que los maestros podrían plantear para generar una “charla matemática” sustanciosa.

Las destrezas de proceso sólidas también les permiten a los estudiantes aplicar los conocimientos que están construyendo para resolver problemas del mundo real que surgen en sus vidas. Los estudiantes pueden ver los vínculos entre los dominios matemáticos y otras áreas temáticas, como el papel de los datos en la ciencia, que crea una nueva y poderosa comprensión del mundo.

PLANES DE ESTUDIOS Y ESTÁNDARES EN LMIC

Aunque las áreas básicas de las matemáticas suelen estar representadas en los planes de estudios y estándares de matemáticas de los LMIC, la investigación sobre planes de estudios de matemáticas de los primeros grados muestra que el contenido curricular a menudo no está en consonancia con las progresiones de aprendizaje y que hay un fuerte énfasis en el conocimiento procedimental sobre el conocimiento conceptual y las destrezas de proceso.³⁴

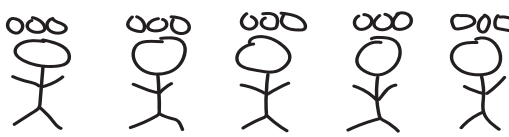



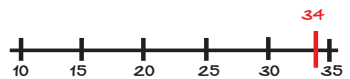


USO DE UNA TABLA DE 100

Una tabla de 100 es una herramienta de aprendizaje simple pero poderosa que puede ayudar a los estudiantes de los primeros grados a dominar los números y las operaciones. La tabla ayuda a los estudiantes a visualizar y comprender los patrones y las relaciones entre los números hasta 100 y a desarrollar tanto la comprensión conceptual como la fluidez procesal mediante el uso de la tabla para apoyar actividades como el conteo saltado, la identificación de patrones, y la suma y la resta. Por ejemplo, cuando los estudiantes comienzan a aprender a resolver problemas como $34 + 52$, la tabla de 100 proporciona un marco o matriz visual sobre cómo crear diferentes estrategias para resolver el problema—como empezar en la casilla del 34 y contar 5 filas hacia abajo (50) y luego 2 columnas hacia la derecha (2) para obtener 86. Con el tiempo, los estudiantes serán capaces de replicar este proceso sin tener que consultar la tabla. Así, el sentido conceptual de los patrones numéricos que los estudiantes adquieren al utilizar la tabla de 100 también les ayudará a ganar fluidez.

Números 1-100									
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100



FIGURA 2. Destrezas de proceso básicas para las matemáticas

Destreza de proceso	Ilustraciones del aula															
<p>Resolver problemas abstractos y de la vida real</p>	<p>Se pide a los estudiantes que resuelvan un problema sobre cuántas tapas de botella se necesitan si hay 15 tapas de botella que se deben compartir entre 5 estudiantes. El maestro anima a los estudiantes a resolver el problema de diferentes maneras, por ejemplo, mediante dibujos y utilizando ecuaciones.</p> 															
<p>Reconocer y utilizar el razonamiento y la demostración como ideas matemáticas fundamentales</p>	<p>Se pide a los estudiantes que demuestren que todos los cuadrados son rectángulos utilizando sus conocimientos sobre las propiedades de rectángulos y cuadrados.</p> <div style="display: flex; justify-content: space-around;"> <div data-bbox="694 705 933 784">  <p><u>Comparar</u></p> <p>Rectángulos y cuadrados:</p> <ul style="list-style-type: none"> - ambos tienen 4 ángulos rectos - ambos tienen 4 lados - ambos son cuadriláteros - ambos tienen lados paralelos </div> <div data-bbox="1045 705 1340 784">  <p><u>Contrastar</u></p> <p>Rectángulos y cuadrados:</p> <ul style="list-style-type: none"> - los cuadrados tienen 4 lados iguales - los rectángulos no tienen que tener 4 lados iguales pero los lados opuestos son iguales </div> </div>															
<p>Comunicar ideas matemáticas de forma clara y coherente</p>	<p>Estudiantes y maestros participan de una charla matemática sobre el problema $29 + 11$, explicando diversas formas de resolver el problema y razonando sobre las soluciones incorrectas.</p> <div style="display: flex; align-items: center;"> <div data-bbox="654 1064 949 1220" style="border: 1px solid gray; border-radius: 15px; padding: 5px; margin-right: 20px;"> <p>Lo resolví utilizando la tabla de 100: Sé que 11 es uno más que 10. Para sumar diez basta con bajar una fila y la respuesta es 39, luego sumo uno más para llegar a 40.</p> </div> <div data-bbox="965 1064 1101 1220" style="border: 1px solid gray; border-radius: 15px; padding: 5px; margin-right: 20px;"> <p>Le saqué uno al 11 para que el 29 se convierta en 30. 30 más 10 es 40.</p> </div> <div data-bbox="1141 1064 1420 1265" style="border: 1px solid gray; border-radius: 15px; padding: 5px;"> <p>Otro estudiante dijo que la respuesta es 310. ¿En qué estaría pensando ese estudiante?</p> </div>  </div>															
<p>Reconocer y utilizar las conexiones entre ideas matemáticas</p>	<p>Los estudiantes de una clase realizan una encuesta para averiguar cuál es la fruta favorita de cada uno. Luego trabajan juntos para hacer un pictograma con los resultados. Utilizando el pictograma, se plantean preguntas y respuestas—como “¿Cuál es la fruta más popular en la clase? ¿Cuál es la menos popular? ¿A cuántas personas les gustan más las manzanas que los mangos?” Por último, discuten las operaciones que van a utilizar para hallar las respuestas.</p> <div style="text-align: right;"> <p>¿Cuál es tu fruta favorita?</p> <table border="1" data-bbox="1093 1422 1332 1758"> <tbody> <tr><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td></td><td></td><td></td></tr> </tbody> </table> <p>Banana Manzana Mango</p> </div>															
<p>Representar ideas o conceptos matemáticos con modelos</p>	<p>Un estudiante muestra el número 34 de varias maneras: utilizando una recta numérica, palitos para contar y una tabla de 100.</p> <div style="display: flex; align-items: center;"> <div data-bbox="486 1982 837 2060">  </div> <div data-bbox="845 1904 1117 2060">  </div> <div data-bbox="1133 1904 1340 2060">  </div> </div>															

Por ejemplo:

- **Progresiones entre grados:** El salto cognitivo de la enseñanza preescolar, donde apenas se habla de matemáticas, a primer grado puede ser enorme. En primaria, los planes de estudios de matemáticas suelen estar sobrecargados, y la velocidad a la que se cubren los contenidos no se ajusta al ritmo de aprendizaje de los estudiantes.³⁵ En Pakistán, una evaluación nacional realizada en 2015 reveló que solo tres quintas partes de los estudiantes de tercer grado de las zonas urbanas podían realizar correctamente un problema de resta (54 - 25); en las zonas rurales, solo dos quintas partes podían hacerlo.³⁶
- **Progresión y conexiones entre temas:** Las progresiones y conexiones entre los temas de matemáticas pueden no estar bien alineadas. Por ejemplo, en Mozambique se revisaron los libros de texto para incluir más problemas de la vida real, pero el contenido relacionado con la medición de objetos utilizando centímetros y metros, que no se enseñaba hasta segundo grado, estaba presente en actividades del libro de texto de primer grado.³⁷
- **Expectativas poco realistas:** En muchos contextos, el plan de estudios está sobrecargado y no se adapta al ritmo de aprendizaje de los estudiantes. Por ejemplo, en Uganda, se espera que los estudiantes sepan las tablas de multiplicar hasta el 6, la división entre 1, 2, 3 y 4, y cómo sumar fracciones al final de segundo grado. Esto no concuerda con la mayoría de los planes de estudios de la región y el mundo desarrollado, donde a los estudiantes generalmente se les enseñan estas destrezas en tercer y cuarto grado.³⁸
- **Énfasis en el conocimiento procedimental sobre el conocimiento conceptual:** En muchos contextos, el plan de estudios y la enseñanza han tendido a favorecer el uso de la memorización y a centrarse principalmente en aprender procedimientos en lugar de comprender los conceptos matemáticos. Por ejemplo, en Ghana, un estudio realizado por el Ministerio de Educación sobre las razones por las que los estudiantes obtienen malos resultados en las pruebas estandarizadas de matemáticas reveló una serie de factores, entre ellos "la naturaleza del plan de estudios, un suministro inadecuado de material didáctico de matemáticas, un escaso conocimiento de los contenidos por parte de los maestros y el uso por parte de estos de prácticas de enseñanza de las matemáticas inefectivas".³⁹ Y a pesar del importante proceso de reforma del plan de estudios, que también modificó drásticamente la formación docente continua, los maestros siguen haciendo hincapié en las habilidades procedimentales en detrimento de la construcción de conocimientos conceptuales; una de las razones de ello es el desajuste entre el plan de estudios de los institutos de formación docente y los planes de estudios de las escuelas.⁴⁰

FIGURA 3. Uso de preguntas para apoyar una "charla matemática" enriquecedora³²

¿Cómo llegaste a esa respuesta?
 ¿Cómo lo sabes?
 ¿Qué notas sobre...?
 ¿En qué se parece o diferencia de...?
 ¿De qué otra forma podrías haber resuelto ese problema?



SUGERENCIAS


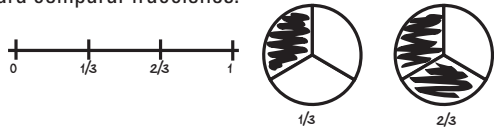
- **Los planes de estudios de matemáticas deben incluir los dominios fundamentales y seguir un marco de progresión del aprendizaje (como el GPF).** Los niños deben recibir enseñanza en cinco dominios fundamentales: números y operaciones, medición, estadística, geometría y álgebra. El aprendizaje en estas áreas debe seguir una clara progresión de aprendizaje para apoyar la participación y el dominio.
- **Los planes de estudios de matemáticas deben incluir un enfoque específico en el desarrollo de la comprensión conceptual, la fluidez procesal y el desarrollo de destrezas de proceso.** Un plan de estudios de matemáticas holístico ayuda a los niños a comprender los conceptos matemáticos y no solo a memorizar un conjunto de reglas y procedimientos. Aprender a resolver problemas de matemáticas de forma procedimental, sin comprender el concepto subyacente, conduce a una comprensión superficial de las matemáticas y a la incapacidad de utilizar el conocimiento conceptual y procedimental para resolver problemas.
- **Las escuelas deben adoptar un plan de estudios "en espiral", que favorezca la comprensión conceptual espaciando los contenidos y repasando los conceptos a lo largo del año.** Este enfoque conduce a una mayor retención y aprendizaje a largo plazo. También ayuda a los niños a aprender material complejo y difícil a lo largo del año escolar, profundizando su comprensión de un concepto determinado cada vez que se enseña.
- **Para desarrollar nuevos planes de estudios o actualizar los actuales, se necesitan expertos de diversas especialidades: aquellos que tienen un profundo conocimiento de las progresiones de aprendizaje de los dominios en el país; aquellos que tienen experiencia práctica en el país; y aquellos que tienen experiencia en el desarrollo y publicación de planes de estudios en el país.** El desarrollo del plan de estudios de matemáticas a menudo se ve envuelto en debates sobre lo que se considera apropiado para el desarrollo (p. ej., ¿Deberíamos enseñar fracciones en los primeros grados? ¿Cuándo debe comenzar la enseñanza de las fracciones?). Este tipo de preguntas son esenciales para discutir entre expertos, quienes deben basarse en la investigación y el conocimiento local para decidir qué es lo apropiado.

Maestros y enseñanza

ESTRATEGIAS PEDAGÓGICAS DE ALTO IMPACTO

En el aula, el enfoque y las estrategias pedagógicas utilizadas por los maestros tienen más impacto en el aprendizaje de los estudiantes que el tipo de libro de texto o el plan de estudios utilizado.⁴¹ Las siguientes estrategias de alto impacto⁴² ilustradas en la Tabla 2 apoyan el desarrollo del conocimiento conceptual y procedimental, así como las destrezas de proceso, y han sido vinculadas con mejores resultados en el aprendizaje de las matemáticas:

TABLA 2. Estrategias pedagógicas de alto impacto

Estrategia	Ejemplo	Beneficios para el estudiante
Vincular las matemáticas informales y formales	<p>Al introducir el concepto de división, el maestro les da a los estudiantes un problema familiar de la vida real para trabajar: Akilah tiene 6 mangos. Ella y sus dos hermanas quieren compartirlos por igual. ¿Cuántos mangos recibe cada hermana?</p>  <p>Después de enseñar el concepto de división, el maestro les pide a los estudiantes que apliquen sus conocimientos para resolver problemas complejos, tales como: Hay 80 sandías para empacar en cajas que contienen 10 sandías cada una. ¿Cuántas cajas necesitas?</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Ayuda a los estudiantes a relacionar las matemáticas que aprenden fuera de la escuela con los conocimientos que adquieren en la escuela. • La vinculación de las matemáticas informales y formales proporciona a los estudiantes una comprensión más profunda de las matemáticas. • Los conocimientos extraescolares se formalizan y representan con símbolos como $+ y =$ • Los conocimientos de la escuela adquieren sentido a través de la aplicación diaria
Discutir las matemáticas	<p>Al abordar un problema, el maestro facilita una discusión en la que varios estudiantes comparten las estrategias que utilizaron para llegar a la misma solución. Los estudiantes utilizan la explicación y justificación para mostrar por qué creen que su solución es correcta.</p> <p>El maestro utiliza preguntas para pedir a los estudiantes que expliquen por qué una solución incorrecta es incorrecta.</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Ayuda a los estudiantes a aprender a cuestionar su solución • Ayuda a los estudiantes a comprender y aclarar conceptos clave • Contribuye a desarrollar una comprensión nueva y más profunda • Apoya el desarrollo de nuevas estrategias • Responsabiliza a los estudiantes de su propio aprendizaje
Utilizar modelos y representaciones adecuados	<p>El maestro modela para los estudiantes dos formas diferentes de representar fracciones y luego les pide que practiquen el uso de los modelos para comparar fracciones.</p> 	<ul style="list-style-type: none"> • Permite a los niños "visualizar" conceptos matemáticos abstractos • Ayuda a los estudiantes a razonar concretamente con ideas matemáticas • Da significado a los símbolos abstractos
Utilizar el conocimiento de los estudiantes y las progresiones de aprendizaje para orientar la enseñanza	<p>Los estudiantes están trabajando en el uso del algoritmo estándar para resolver el problema</p> $\begin{array}{r} 28 \\ + 53 \\ \hline \end{array}$ <p>Muchos estudiantes creen que la respuesta es 71 y no 81. El maestro se da cuenta de que necesita repasar el concepto de valor posicional antes de proceder con el algoritmo.</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Utiliza progresiones de aprendizaje para proporcionar la enseñanza adecuada • Permite volver a enseñar conceptos y destrezas cuando sea necesario • Ofrece múltiples oportunidades y prácticas para construir conocimiento

La evaluación formativa es otra importante estrategia pedagógica de alto impacto, aunque no es exclusiva de las matemáticas. **Integrar la evaluación formativa en la práctica habitual del aula y vincularla a las estrategias pedagógicas antes mencionadas contribuye a mejorar los resultados del aprendizaje de los estudiantes.**⁴³ **Las ganancias de aprendizaje son mayores cuando la información de las evaluaciones se utiliza para modificar la enseñanza e identificar formas de brindar apoyo a los estudiantes.**⁴⁴ Los maestros deben utilizar de forma continua herramientas de evaluación simples y confiables que estén vinculadas a las destrezas clave y a las actividades de recuperación o enriquecimiento asociadas. Los esfuerzos de formación docente deben integrar el uso de la evaluación formativa continua en los planes de formación, incluyendo tiempo para practicar su administración y revisión. Los maestros deberán recibir apoyo para gestionar esta compleja tarea y recibir orientación concreta sobre cómo integrarla en la práctica diaria, sobre todo en clases más numerosas. Véase la guía sobre [Enseñanza basada en la evaluación: Nivel del aula](#) para un análisis más detallado de la evaluación formativa.



CONOCIMIENTO DEL CONTENIDO Y CONOCIMIENTO PEDAGÓGICO DEL CONTENIDO POR PARTE DE LOS MAESTROS

Para enseñar de manera efectiva, los maestros deben desarrollar tanto un sólido conocimiento del contenido (conocimiento de las matemáticas) como un sólido conocimiento pedagógico del contenido (conocimiento sobre la enseñanza de las matemáticas).⁴⁵ Una comprensión “conectada” del contenido de aritmética inicial que incluya el conocimiento de cómo progresa el aprendizaje de la aritmética y el conocimiento pedagógico del contenido conduce a una comprensión conceptual más sólida y a mejores resultados para los niños.⁴⁶ Hill y Ball encontraron que los maestros en servicio demostraron el mayor crecimiento mediante un desarrollo profesional centrado en el contenido y los problemas matemáticos que enfrentarían como maestros.⁴⁷

En los LMIC, muchos maestros no tienen un conocimiento sólido de las competencias básicas en matemáticas, en particular aquellas que requieren una comprensión conceptual. Una encuesta realizada en países africanos reveló que más del 90 % de los maestros eran capaces de resolver problemas básicos de suma, pero que a medida que el contenido se volvía más desafiante y menos procedimental, las cifras disminuían: solo el 11 % era capaz de interpretar datos en un gráfico y solo el 15 % era capaz de resolver problemas escritos.⁴⁸ Según un estudio del Banco Mundial sobre América Latina y el Caribe, el 84 % de los maestros de Perú obtuvo una calificación inferior al nivel 2 en matemáticas, lo que el Ministerio de Educación peruano define como “incapaz de establecer relaciones matemáticas y adaptar estrategias y procedimientos matemáticos de rutina y sencillos”.⁴⁹

A la hora de enseñar matemáticas, muchos maestros recurren a técnicas de memorización que favorecen la fluidez procesal sobre la comprensión conceptual.⁵⁰ Esto puede reflejar una dificultad tanto con el conocimiento del contenido como con el conocimiento pedagógico del contenido matemático, donde los maestros pueden no saber cómo enseñar ideas matemáticas conceptualmente y, en cambio, centrarse en el procedimiento, confiando en cómo aprendieron matemáticas ellos mismos. Por ejemplo, muchos maestros saben cómo resolver el problema $41 + 56$ utilizando el procedimiento de suma en columnas, pero no saben qué estrategias y modelos utilizar para ayudar a los estudiantes a comprender el algoritmo. Los maestros pueden conocer los procedimientos para crear fracciones equivalentes, pero pueden no entender cómo representar fracciones equivalentes en una recta numérica y un modelo de área. En Paraguay, una investigación sobre las prácticas matemáticas de los maestros reveló que el 90 % de los maestros preescolares no entendían el contenido matemático que enseñaban a sus estudiantes,⁵¹ y en Sudáfrica, el bajo desempeño de los estudiantes se ha relacionado con el escaso conocimiento de la asignatura por parte de los maestros.⁵² En Kenia, la investigación ha indicado que los maestros a menudo se basan en gran medida en la memorización, la recitación y la conferencia para transmitir información,⁵³ y el lenguaje del aula es formal y carente de cualquier conexión con el mundo real.⁵⁴ **Un enfoque de la formación docente que incluya y conecte suficientemente tanto el conocimiento del contenido como el conocimiento pedagógico del contenido produciría maestros mejor preparados para enseñar conceptos matemáticos en los primeros grados.**

DESARROLLO PROFESIONAL PARA DOCENTES EN LMIC

La formación inicial docente en muchos LMIC se enfrenta a numerosos desafíos, como se analiza en la guía práctica sobre [Formación inicial docente](#). Un informe de la UNESCO sobre la preparación de los docentes en América Latina reveló que los programas de formación inicial no dedicaban suficiente tiempo ni atención al dominio de los contenidos y el aprendizaje activo, y que las prácticas docentes en las escuelas eran extremadamente limitadas o inexistentes.⁵⁵ Aunque los maestros quieren utilizar en sus aulas estrategias como el debate, el trabajo en pequeños grupos y las conexiones con el mundo exterior, los ejemplos de esta forma de enseñanza “conectada” en sus contextos son limitados.⁵⁶ Por lo tanto, recurren por defecto a estrategias tradicionales como la memorización y la recitación.⁵⁷

Los programas de formación docente inicial y continua en matemáticas suelen emplear a un cuerpo de instructores que pueden tener un conocimiento sólido del contenido, pero que no están adecuadamente preparados para enseñar conceptos matemáticos, particularmente en el primer ciclo de primaria.⁵⁹ Un estudio encontró que los instructores de docentes de matemáticas de Ghana tienen dificultades para proporcionar una orientación adecuada en el uso del material didáctico, un componente fundamental de la enseñanza y el aprendizaje en los primeros años. A menudo no se da a los maestros espacio para “reflexionar, analizar o criticar cómo funcionaría un método específico para enseñar a sus futuros estudiantes en contextos de aulas reales”.⁶⁰ A los instructores de docentes tampoco se les exige experiencia en la enseñanza escolar—y cuando la tienen, suele ser en los niveles medio y secundario. Los programas de preparación de los docentes deben garantizar que el cuerpo de instructores tenga un conocimiento práctico de las situaciones actuales en las aulas y pueda proporcionar conocimientos sobre cómo enseñar, además de qué enseñar, en estos contextos.

CONOCIMIENTO PEDAGÓGICO DEL CONTENIDO POR PARTE DE LOS MAESTROS

Problemas como los que se exponen a continuación pueden utilizarse para comprender los conocimientos existentes de los maestros y para desarrollarlos durante las sesiones de desarrollo profesional.

A la pregunta “¿Qué parte del cuadrado más grande representa la parte sombreada?” el estudiante respondió “1/3.” ¿Cuál de las siguientes razones es la más probable para dicha respuesta del estudiante?



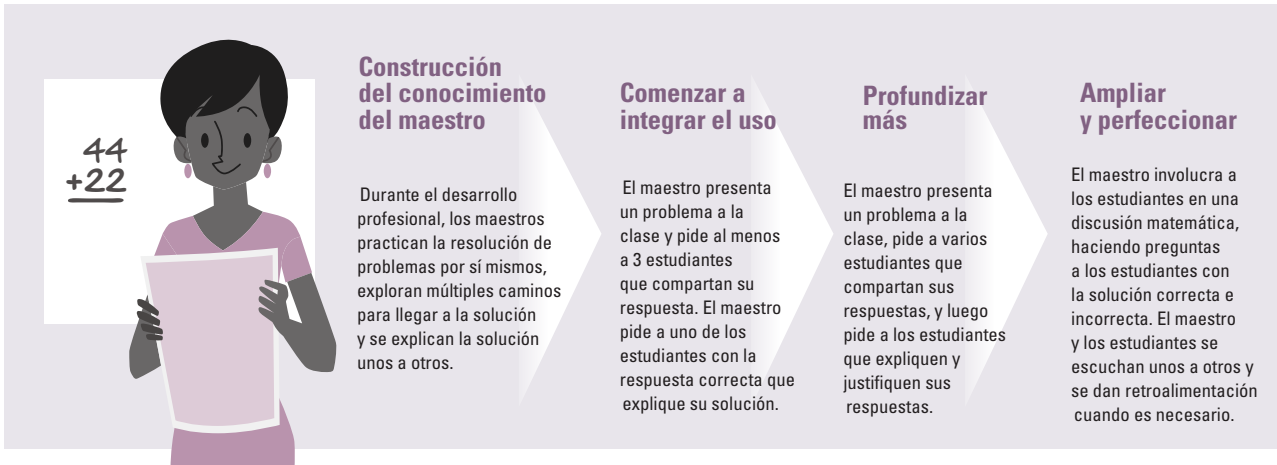
- Esta respuesta es correcta
- El estudiante no comprende que el denominador debe incluir un número de partes iguales
- El estudiante hizo un error de cómputo
- Tengo dificultad para responder

Almaz sumó 35 más 36 y dijo que el total era 611. ¿Qué puede hacer la maestra para ayudar a Almaz?

- Darle más problemas de práctica similares
- Repasar el tema de sumas y restas hasta el número 20
- Repasar el tema del valor posicional de los números
- Tengo dificultad para responder

Cambiar la práctica docente lleva tiempo, y no todos los maestros se sentirán cómodos implementando nuevas ideas de inmediato. Es importante abordar a los maestros en el punto en el que se encuentran y brindarles oportunidades de crecimiento a todos los niveles. Sitabkhan et al. analizan cuatro puntos de entrada diferentes a las vías de desarrollo profesional para docentes y ofrecen ejemplos de cómo ayudar a los maestros a comprender e implementar estrategias de alto impacto en sus aulas, en función de su nivel de competencias y conocimientos (véase la Figura 4).⁶¹ A través del fortalecimiento y coordinación del apoyo inicial, en servicio y continuo recibido, los maestros pueden adquirir las competencias y conocimientos necesarios para aplicar las estrategias pedagógicas de alto impacto en sus aulas.

FIGURA 4. Recorrido profesional de los maestros para abordar las matemáticas



SUGERENCIAS

- **Crear un grupo de instructores iniciales, instructores en servicio y “coaches” con conocimientos pedagógicos y de contenidos matemáticos.** Los nuevos maestros necesitan apoyo, estímulo y un modelo a seguir. Deben recibir apoyo sistemático de un especialista en la materia que observe las lecciones y modele una enseñanza efectiva, teniendo en cuenta la dinámica real del aula.
- **Garantizar que el desarrollo profesional inicial y continuo incluya y conecte tanto el conocimiento del contenido como el conocimiento pedagógico del contenido de matemáticas.** Los programas de formación docente deben abordar los conceptos matemáticos de los cinco dominios utilizando enfoques flexibles de resolución de problemas basados en la comprensión conceptual. Los programas de preparación deben hacer hincapié en la comprensión profunda—en lugar de limitarse a los pasos procedimentales para la resolución de problemas—especialmente para conceptos abstractos como el valor posicional y el concepto de números pares e impares. Mostrar a los maestros cómo establecer conexiones dentro y a través de otros dominios—por ejemplo, mostrando la relación entre la suma y la multiplicación, y cómo el área de una forma está relacionada con sus propiedades geométricas—es fundamental para ayudarles a desarrollar una comprensión “conectada” de las matemáticas. Los maestros deben involucrarse en la resolución auténtica de problemas para poder “visualizar” cómo resolver un problema de múltiples maneras y aprender a explicar y justificar sus respuestas. Este tipo de práctica preparará a los maestros para poder dirigir una discusión en la que los estudiantes compartan múltiples respuestas.

AUTÉNTICA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS ⁵⁸

En un esfuerzo por mejorar los resultados de aprendizaje de los estudiantes de matemáticas en Ghana, se desarrolló un nuevo plan de estudios de matemáticas de primaria que se centra en aumentar la comprensión conceptual matemática de los estudiantes, utilizando modelos físicos para representar conceptos matemáticos y haciendo hincapié en las habilidades de cálculo mental de los estudiantes. Con el apoyo del programa Ghana Learning (Aprendizaje en Ghana), financiado por USAID, los círculos de aprendizaje semanales ayudaron a los maestros a dejar de centrarse en la memorización de procedimientos para construir su propia comprensión de los conceptos matemáticos subyacentes a los procedimientos. Los maestros se involucraron en la auténtica resolución de problemas matemáticos.

Al final del período de intervención, la mayoría de los maestros (89 %) consideraba que el programa de formación continua había aumentado sus conocimientos de matemáticas. Aproximadamente tres cuartas partes de los maestros consideraron que el programa era más efectivo que los programas tradicionales de formación continua a la hora de ayudarles a probar nuevas prácticas de enseñanza de las matemáticas en el aula y de ayudarles a comprender nuevos modelos y prácticas.

- Formar parejas con maestros en formación y titulares para una experiencia práctica que exponga a los docentes en formación a situaciones reales en el aula.** Las prácticas son fundamentales para los maestros que se encuentran en formación y deben tener una duración en la que puedan aplicar de forma significativa las competencias y conocimientos aprendidos durante su programa de preparación. Los maestros titulares deben reconocer su papel en el modelado de una enseñanza sólida para los maestros en formación y brindarles experiencias enriquecedoras para desarrollar competencias. Véase también la guía práctica sobre [Formación inicial docente](#) para un mayor análisis. También es fundamental que los maestros titulares ayuden a los maestros en formación a cambiar las percepciones sexistas de que las matemáticas son una asignatura para varones. Solo un pequeño porcentaje de niñas sigue carreras de ciencias o ingeniería, debido en gran parte a esas percepciones entre padres, maestros y miembros de la comunidad. Los maestros deben ser firmes defensores de la excelencia de las niñas en campos que requieren una sólida formación en matemáticas.
- Garantizar que la formación continua, en combinación con el apoyo continuo, adopte estrategias de alto impacto y ofrezca un marco o matriz para que los maestros se vuelvan más competentes con el tiempo.** Los maestros pueden participar en formaciones centradas en prácticas docentes efectivas, pero el cambio en la enseñanza requiere tiempo. Abordar a los maestros allí donde se encuentran es fundamental para fomentar la confianza y el éxito. **Las vías de desarrollo profesional, con diversos puntos de entrada según las competencias y conocimientos del maestro, pueden ayudar a los maestros a comprender e implementar estrategias pedagógicas de alto impacto en sus aulas a su propio ritmo y nivel de comodidad.** Además, algunos métodos de enseñanza promueven niveles más altos de rendimiento en beneficio de las niñas, como la presentación de problemas matemáticos en contextos adecuados al género, el planteamiento de problemas matemáticos que promuevan una comprensión más profunda, el uso de métodos de colaboración en el aula y la utilización de métodos de evaluación que no requieran mucho tiempo.⁶² Estas ideas deben incluirse en los programas de formación inicial docente. Véanse las guías prácticas de pedagogía estructurada sobre [Desarrollo profesional para docentes: Formación de docentes](#) y [Desarrollo profesional para docentes: Apoyo continuo a los maestros](#).

Material didáctico

IMPORTANCIA DEL MATERIAL DIDÁCTICO

El material didáctico es un componente fundamental de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Las guías del maestro, los cuadernos de ejercicios para los estudiantes y los libros de texto son el tipo más común de material didáctico. Igualmente importantes son los materiales físicos que se pueden mover y tocar; a menudo se denominan material concreto e incluyen fichas, dedos, cuentas, palitos de helado, formas geométricas, etc.

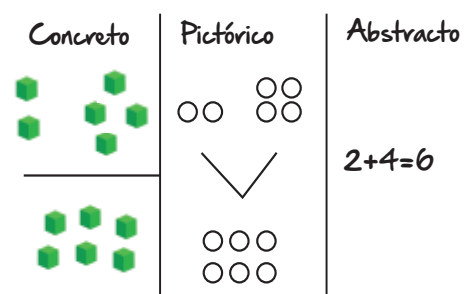
Además de los materiales físicos, los modelos pictóricos o de representación (como dibujos, diagramas y símbolos) también ayudan a que los conceptos abstractos resulten más claros para los niños pequeños. En el primer ciclo de primaria, los niños pueden trabajar primero con material concreto, después utilizar representaciones dibujadas o pictóricas y, por último, recurrir a símbolos matemáticos abstractos para representar ideas o conceptos matemáticos.⁶³ La Figura 5 muestra cómo aprenden los niños el concepto de suma: primero de forma concreta con material concreto como bloques o palitos, después utilizando modelos pictóricos y, por último, utilizando símbolos abstractos.

El uso de materiales para representar conceptos abstractos ayuda a los niños a razonar con más sentido,⁶⁴ y la integración adecuada y sistemática de materiales en el aula de matemáticas puede tener resultados positivos en el aprendizaje.⁶⁵ Se ha demostrado que el uso preciso de los materiales mejora destrezas que van desde contar hasta resolver problemas.⁶⁶ Por el contrario, si se utilizan de forma inadecuada, los materiales pueden “provocar frustración o confusión y, en última instancia, alterar la motivación de los estudiantes y las oportunidades generales de aprendizaje”.⁶⁷ Proporcionar materiales a las aulas y a los maestros sin instrucción ni orientación tiene un impacto relativamente pequeño en los resultados del aprendizaje.⁶⁸

MATERIALES Y FORMACIÓN

Los maestros deben estar bien formados en el uso adecuado de los materiales y deben saber cómo dirigir discusiones constructivas en torno a las observaciones de los estudiantes.⁶⁹ El contexto en el que se utiliza el material concreto es lo que crea significado, y la conversación e interacción entre los estudiantes y el maestro es lo que conduce a la comprensión.⁷⁰ Es fundamental planificar cuidadosamente el uso de los materiales y saber cómo los distintos materiales destacan las ideas matemáticas importantes.⁷¹ Por ejemplo, en la Figura 6, los estudiantes utilizan pajitas para ayudar a comprender el concepto de valor posicional. Agrupan las pajitas en manojos de 10, y las pajitas individuales representan los unos. Este material concreto permite a los estudiantes “visualizar” la estructura de nuestro sistema numérico y comprender que el número 14, por ejemplo, es un manojito de 10 y 4 unos. Una vez que los estudiantes han internalizado este concepto, ya no necesitan utilizar las pajitas para “visualizar” el valor posicional y, en su lugar, pueden utilizar el valor posicional para resolver nuevos problemas.

FIGURA 5. Aprender sobre la suma utilizando material concreto, imágenes y luego símbolos



El uso de material concreto como apoyo a la comprensión implica desarrollar una lección que incluya el contenido matemático, identifique el tipo de material a utilizar, ya sea físico (como fichas) o un modelo pictórico o de representación (como una recta numérica), y explique cómo el maestro modelará el uso de los materiales y permitirá que los niños practiquen. Luego los maestros deben determinar cuántos materiales se necesitan, si se utilizarán individualmente o en grupo, cómo se distribuirán y almacenarán, y cómo se orientará a los niños sobre su uso. La investigación muestra que cuando los niños reciben orientación sobre cómo utilizar adecuadamente los materiales, obtienen mejores resultados de aprendizaje.⁷² Para apoyar mejor a los maestros en este sentido, es importante proporcionarles guías que especifiquen cómo utilizar determinados materiales para enseñar contenidos matemáticos específicos y que ofrezcan apoyo para secuenciar los contenidos y los materiales.^{73,74}

Los materiales pueden ser de origen local y económicos (como tapas de botella, semillas y piedritas a modo de fichas). Aunque los maestros pueden reunir y crear materiales por sí mismos, existe cierta evidencia de que proporcionarles los materiales que necesitan puede ayudar a garantizar que sean apropiados, abundantes y con probabilidades de ser utilizados.⁷⁵ También hay que reconocer que mantener la diversidad de materiales en un número manejable ayuda a aliviar la carga que supone para los maestros la recolección de diferente material concreto y otros suministros, y reduce el número de nuevas técnicas de enseñanza que los maestros deben conocer.⁷⁶ La Figura 6 muestra materiales locales de conteo y valor posicional en Malawi y Ghana.

FIGURA 6. Material concreto local de matemáticas en Malawi y Ghana



MATERIAL DIDÁCTICO EN LMIC

El material didáctico en las aulas de matemáticas de los primeros grados es esencial. Ayuda a los niños pequeños a hacer que conceptos como el valor posicional, la suma y la multiplicación resulten más concretos. El uso de materiales para representar conceptos abstractos ayuda a los niños a razonar con más sentido,⁷⁷ y la integración adecuada y práctica de materiales en el aula de matemáticas puede tener resultados positivos en el aprendizaje.⁷⁸ En los LMIC, los libros de texto y los materiales de aprendizaje suelen ser limitados y los niños tienen que compartir los recursos.⁷⁹ En el África subsahariana, en promedio, tres estudiantes comparten un libro de matemáticas; específicamente en Camerún, en promedio, 14 estudiantes comparten un libro de texto de matemáticas.⁸⁰ En el informe de la primera fase del Fondo Mundial del Libro, en el que se analizó el material didáctico de 13 países en desarrollo del Caribe, el África subsahariana, el subcontinente indio y el sudeste asiático, solo tres países proporcionaban algo más que libros de texto básicos y guías del maestro. Además, ninguno de los países encuestados alcanzó o mantuvo sus propios objetivos básicos, ni siquiera para el suministro de libros de texto y guías del maestro. Asimismo, los datos sugieren que los gobiernos de los LMIC suelen dar prioridad a los libros de texto de secundaria frente a los de primaria, y a los de segundo ciclo de primaria frente a los de primer ciclo.⁸¹

FIGURA 7. Kit de matemáticas del programa Impulso a la aritmética, con materiales de origen local





EL ENFOQUE DE PEDAGOGÍA ESTRUCTURADA DE FUNDA WANDE

En el programa de matemáticas de Funda Wandé, Bala Wandé, los maestros reciben una guía del maestro que establece los objetivos de las lecciones diarias y semanales e indica el tipo de actividades de enseñanza y aprendizaje necesarias para alcanzar los objetivos de aprendizaje, incluyendo cómo integrar el material concreto en la lección y qué tipo de evaluación utilizar para el tema particular que se está enseñando. Los videos de maestros titulares enseñando el contenido brindan andamiaje y apoyo adicional a los maestros, y una sección de desarrollo conceptual describe el concepto matemático que se aborda en las actividades de enseñanza de toda la clase, el vocabulario que los maestros deben utilizar y los comportamientos específicos relacionados con las matemáticas que deben tener en cuenta a medida que los alumnos avanzan hacia los conceptos objetivo.⁷⁴

La mayoría de las aulas de los LMIC cuentan con escasos materiales, aparte de los libros de texto. Si es raro ver un aula con biblioteca, más raro aún es ver materiales de matemáticas en las aulas. Save the Children, en el marco de su intervención Numeracy Boost (Impulso a la aritmética), proporciona un "kit de matemáticas" a cada aula en la que trabaja (véase la Figura 7). Estos kits incluyen piedritas, manojos de pajitas y otros objetos para clasificar y contar, junto con orientaciones para los maestros sobre cómo utilizarlos. Antes de recibir estos kits, las escuelas participantes en el programa Impulso a

la aritmética de Bangladesh, El Salvador, Malawi y Pakistán no tenían materiales de matemáticas.⁸²

La investigación sobre el uso de materiales por parte de los maestros en LMIC es extremadamente limitada. La evidencia que existe apunta a una falta de tiempo de formación adecuado y a una metodología que no permite a los maestros reflexionar sobre la práctica y discutir la aplicabilidad en la vida real del uso del material en las aulas. Esto dificulta que los maestros utilicen los materiales en el aula, lo que les lleva a enseñar de formas que les resultan más familiares⁸³ y a emplear los materiales únicamente con fines de demostración mientras los niños observan pasivamente.⁸⁴ Los maestros también asocian el uso de materiales como algo "extra" o fuera del plan de estudios.⁸⁵ Además, factores como las clases muy numerosas y los dobles turnos pueden dejar a muchos maestros con poco tiempo para preparar la enseñanza en el aula, incluida la preparación de materiales.⁸⁶ Un proyecto piloto exploratorio en Ghana proporcionó actividades secuenciadas de aritmética para implementar en niños de seis y siete años.⁸⁷ Algunos de los maestros recibieron todo el material necesario para implementar estas actividades, mientras que a otros se les pidió que lo crearan o lo reunieran. Los maestros que recibieron todo el material necesario para una lección mostraron más probabilidades de utilizar las actividades que se les proporcionaron y más probabilidades de emplear estrategias pedagógicas de alto impacto, en comparación con el otro grupo.



SUGERENCIAS

- **Garantizar que haya un nivel mínimo de material didáctico en cada aula que incluya un libro de texto para cada estudiante y una guía del maestro para cada maestro.** La guía del maestro debe incluir instrucciones que relacionen las lecciones con el material y expliquen cómo utilizar el material. Véase un análisis adicional al respecto en la guía práctica de pedagogía estructurada sobre [Desarrollo de material didáctico](#).
- **Proporcionar a todas las aulas un kit de material concreto para uso de los estudiantes.** Un kit de materiales de matemáticas de origen local es un componente esencial del aula de matemáticas de los primeros grados. El kit debe centrarse en unos pocos materiales aprovechables que puedan utilizarse para múltiples conceptos y temas, y debe incluir materiales suficientes para que todos los niños puedan utilizarlos en pequeños grupos.
- **Garantizar que los maestros tengan suficiente formación, modelado y práctica sobre cómo utilizar adecuadamente el material didáctico.** Los materiales a utilizar en el aula deben ir acompañados de formación y apoyo centrados en cómo elegir los materiales adecuados para la lección que se va a enseñar, cómo pueden compartirse los materiales en pequeños grupos, y cómo se deben manipular y almacenar. Las formaciones deben incluir un adecuado modelado y demostración a cargo de un instructor especializado en matemáticas, así como amplias oportunidades para practicar. Véase la guía de pedagogía estructurada sobre [Desarrollo profesional para docentes: Formación de docentes](#) para un mayor análisis sobre la incorporación del modelado y la práctica en la formación.

Conclusión

Los responsables políticos, los donantes y los implementadores deben reconocer la importancia de la lectura, escritura y aritmética tempranas como temas básicos fundamentales, y deben enfatizar cada uno de ellos por igual. La atención prestada a la lectura en los primeros grados ha dado lugar a estudios e investigaciones sobre prácticas prometedoras para apoyar el desarrollo de la lecto-escritura en los LMIC, lo que ha mejorado la comprensión por parte del sector de los modelos y enfoques de implementación exitosos para mejorar los resultados de la lecto-escritura a escala; se necesita un trabajo similar para comprender mejor lo que funciona para fortalecer las habilidades matemáticas en estos contextos. Un mayor número de intervenciones en matemáticas de los primeros grados bien planificadas, desarrolladas en colaboración con los gobiernos de los países anfitriones y basadas en investigaciones rigurosas contribuirán a cerrar las brechas en este campo en relación con el conocimiento del contenido por parte de los maestros, la pedagogía y el uso de material didáctico.



La creación de una incubadora para poner a prueba enfoques y programas exitosos de matemáticas desarrollados en diversos LMIC podría ser un punto de partida para generar más información sobre lo que funciona en la educación temprana en matemáticas.

Los gobiernos deben poner de su parte para garantizar un nivel mínimo de material didáctico en las aulas, empezando por que cada niño tenga su propio libro de texto. Los instructores de matemáticas y los desarrolladores de planes de estudios de los LMIC deben ayudar a los responsables políticos y a los funcionarios del gobierno a comprender que los niños de los primeros grados desarrollan su comprensión de las matemáticas a través de una progresión concreto-pictórico-abstracto y que el material didáctico ayuda a profundizar la comprensión de los conceptos abstractos por parte de los estudiantes. El uso de materiales de matemáticas de origen local no solo beneficiaría el aprendizaje de las matemáticas, sino que también les mostraría a los niños que las matemáticas están presentes a nuestro alrededor.

Aunque aquí no se tratan en detalle, las **actitudes sexistas sobre “para quién” son las matemáticas, así como las actitudes de los maestros en torno a “quién es bueno” en matemáticas, deben ser abordadas por la comunidad global. Estas percepciones impiden que las niñas progresen en carreras relacionadas con ciencias, tecnología, ingeniería y matemáticas, y se debe hacer mucho más para cambiar estas normas.**

Los siguientes son algunos temas que merecen una mayor investigación en los LMIC:

- Temas de matemáticas tempranas que los maestros tienen dificultades para enseñar de manera efectiva
- Estrategias pedagógicas más efectivas para aumentar la comprensión conceptual de los contenidos matemáticos
- Uso de material didáctico en el aula
- Planes de estudios y metodologías de formación inicial y continua en matemáticas
- Experiencias prácticas iniciales en matemáticas tempranas
- Actitudes hacia las matemáticas entre estudiantes, maestros, familias y miembros de la comunidad

RECURSOS

Estudio documental de B. Atweh, M. Craven y H. Venkat que aborda el desarrollo de la aritmética en los primeros años de infancia y escolarización en el contexto de los países de bajos ingresos: https://www.academia.edu/21205934/Teaching_Numeracy_in_Pre_School_and_Early_Grades_in_Low_Income_Countries_GIZ_report_Atweh_Bose_Craven_Subraniam_and_Venkat

Documento de la Red Global de Lectura dirigido a las partes interesadas involucradas en el diseño, implementación o supervisión de programas de lectura, escritura y aritmética en los primeros grados: <https://www.globalreadingnetwork.net/resources/towards-design-and-implementation-comprehensive-primary-grade-literacy-and-numeracy>

Análisis en profundidad de cuatro estrategias pedagógicas clave para una enseñanza efectiva de las matemáticas: <https://shared.rti.org/content/instructional-strategies-mathematics-early-grades>

Múltiples estudios de LMIC sobre el uso de estrategias pedagógicas comunes en las aulas de matemáticas de los primeros grados: <https://files.eric.ed.gov/fulltext/ED586780.pdf>

"Bala Wandé: Calculating with Confidence" (Calcular con confianza), un programa de matemáticas para primeros grados diseñado por expertos en matemáticas de Sudáfrica, con contenidos bilingües: <https://fundawande.org>

"Teaching at the Right Level" (Enseñanza al Nivel Adecuado) de Pratham, que agrupa a los estudiantes por necesidades de aprendizaje y dedica tiempo a fortalecer las competencias básicas: <https://www.teachingattherightlevel.org/>



EXPERIENCIA TÉCNICA NECESARIA

- **Experiencia en el desarrollo de contenidos y planes de estudios de matemáticas de los primeros grados** para la adaptación de los planes de estudios nacionales de formación inicial a las prácticas actuales en matemáticas de los primeros grados basadas en la evidencia y para el desarrollo de materiales específicos de apoyo a estos planes de estudios
- **Experiencia pedagógica en la formación docente en matemáticas** para el fortalecimiento de programas de desarrollo profesional para docentes en formación, centrados en modelar enfoques pedagógicos basados en la evidencia para matemáticas de los primeros grados
- **Experiencia relacionada con asociaciones entre escuelas y programas de formación inicial**, incluido el desarrollo de programas de prácticas de alto impacto que incluyan oportunidades para que los maestros enseñen lecciones de matemáticas y reciban retroalimentación constructiva
- **Experiencia relacionada con el desarrollo profesional continuo para la enseñanza de las matemáticas**, incluido el uso de la tecnología y el aprendizaje combinado para apoyar de manera efectiva el desarrollo docente



Este documento está bajo una Licencia Internacional de Creative Commons Attribution 4.0.
<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>

AUTORES

Shirin Lutfeali, Dra. Yasmin Sitabkhan, Dra. Wendi Ralaingita, y Dr. Benjamin Piper

NOTAS FINALES

- 1 C. Tredoux and A. Dawes, *Predictors of Mathematics and Literacy Skills at 15 Years Old in Ethiopia, India, Peru and Vietnam: A Longitudinal Study* (London: Young Lives, 2018).
- 2 G. J. Duncan, C. J. Dowsett, A. Claessens, et al., "School Readiness and Later Achievement," *Developmental Psychology* 43, no. 6 (2007): 1428-1446.
- 3 Institute of Education Sciences, *Teaching Math to Young Children: Educator's Practice Guide* (Washington, DC: US Department of Education, National Center for Education Evaluation and Regional Assistance, 2013).
- 4 S. Cueto, J. León, M. Sorto, and A. Miranda, "Teachers' Pedagogical Content Knowledge and Mathematics Achievement of Students in Peru," *Educational Studies in Mathematics* 94, no. 3 (2017); E. A. Hanushek, G. Schwerdt, and L. W. Wiederhold, "Returns to Skills around the World: Evidence from PIAAC 2014," *European Economic Review* 73 (2014): 103-130.
- 5 N. Evans, D. Srikantaiah, A. Pallangyo, et al., "Towards the Design and Implementation of Comprehensive Primary Grade Literacy and Numeracy Programs," Global Reading Network Working Paper (Washington, DC: USAID, 2019).
- 6 R. Slaby, S. Loucks, and P. Stelwagon, "Why Is Preschool Essential in Closing the Achievement Gap?," *Educational Leadership and Administration* 17 (2005): 47-57.
- 7 N. Jordan, D. Kaplan, C. Ramineni, and M. Locuniak, "Early Math Matters: Kindergarten Number Competence and Later Mathematics Outcomes," *Developmental Psychology* 45, no. 3 (2009): 850-867.
- 8 P. Fisher, J. Dobbs-Oates, G. Doctoroff, and D. Arnold, "Early Math Interest and the Development of Math Skills," *Journal of Educational Psychology* 104, no. 3 (2012): 673-681.
- 9 P. L. Morgan, G. Farkas, and Q. Wu, "Five-Year Growth Trajectories of Kindergarten Children with Learning Difficulties in Mathematics," *Journal of Learning Disabilities* 42 (2009): 306-321.
- 10 UNICEF and International Telecommunication Union, *Towards an Equal Future: Reimagining Girls' Education through STEM* (New York: UNICEF, 2020).
- 11 RTI International *Ghana 2015: Early Grade Reading Assessment and Early Grade Mathematics Assessment: Report of Findings* (Washington, DC: USAID), https://ierc-publicfiles.s3.amazonaws.com/public/resources/Ghana%202015%20EGRA-EGMA_22Nov2016_FINAL.pdf.
- 12 PAL Network, ICAN: *International Common Assessment of Numeracy; Background, Features and Large-Scale Implementation* (Nairobi: People's Action for Learning Network, 2020).
- 13 RTI International, *Assistance to Basic Education: All Children Reading (ABE-ACR): Final Findings Report, Tanzania National Early Grade Reading Assessment (EGRA)* (Washington, DC: USAID, 2016), <https://www.globalreadingnetwork.net/resources/2016-tanzania-national-egra-egma-ssme-life-skills-findings-report>.
- 14 G. Bethell, *Mathematics Education in Sub-Saharan Africa: Status, Challenges and Opportunities* (Washington, DC: World Bank, 2016).
- 15 World Bank, *World Development Report* (Washington, DC: World Bank, 2018).
- 16 ASER Centre, *Annual Status of Education Report (Rural)* (2019), <http://img.asercentre.org/docs/ASER%202018/Release%20Material/aserreport2018.pdf>.
- 17 E. Ghasemi and H. Burley, "Gender, Affect, and Math: A Cross-National Meta-Analysis of Trends in International Mathematics and Science Study 2015 Outcomes," *Large-Scale Assessments in Education* 7, no. 10 (2019).
- 18 B. Atweh, M. Graven, and H. Venkat, *Teaching Numeracy in Pre-school and Early Grades in Low Income Countries* (Bonn: GIZ, 2014).
- 19 Institute of Education Sciences, *Teaching Math to Young Children*, 2013.
- 20 Evans et al., "Towards the Design and Implementation," 2019.
- 21 R. A. Schmidt and R. A. Bjork, "New Conceptualizations of Practice: Common Principles in Three Paradigms Suggest New Concepts for Training," *Psychological Science* 3 (1992): 207-217.
- 22 L. K. Son and D. A. Simon, "Distributed Learning: Data, Metacognition, and Educational Implications," *Educational Psychology Review* 24 (2012).
- 23 D. Clements and J. Sarama, *Early Childhood Mathematics Education Research: Learning Trajectories for Young Children* (New York: Routledge, 2009).
- 24 National Association for the Education of Young Children and National Council of Teachers of Mathematics, "Early Childhood Mathematics: Promoting Good Beginnings," joint position statement (2010), <https://www.naeyc.org/sites/default/files/globally-shared/downloads/PDFs/resources/position-statements/psmath.pdf>.
- 25 National Council of Teachers of Mathematics, "Focusing on Multiplication and Division" (2010), <https://www.nctm.org/Handlers/AttachmentHandler.ashx?attachmentID=9oj%2BMYeR0tY%3D>.
- 26 National Research Council, *Adding It Up: Helping Children Learn Mathematics* (Washington, DC: National Academies Press, 2001).
- 27 National Council of Teachers of Mathematics, *Procedural Fluency in Mathematics: A Position of the National Council of Teachers of Mathematics* (Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, 2014).
- 28 E. Gray and D. Tall, "Duality, Ambiguity, and Flexibility: A 'Proceptual' View of Simple Arithmetic," *Journal for Research in Mathematics Education* 25, no. 2 (1994): 116-140.
- 29 D. Clements and J. Sarama, "Early Childhood Mathematics Intervention," *Science* 333, no. 6045 (2011): 968-970.



- 30 K. H. Seo and H. P. Ginsburg, "What Is Developmentally Appropriate in Early Childhood Mathematics Education? Lessons from New Research," in D. Clements and J. Sarama (eds.), *Engaging Young Children in Mathematics* (Mahwah, NJ: Erlbaum Associates Inc., 2004).
- 31 National Council of Teachers of Mathematics, *Principles and Standards for School Mathematics* (Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, 2000).
- 32 Evans et al., "Towards the Design and Implementation," 2019.
- 33 M. Lampert and P. Cobb, "Communication and Language," in W. G. Kilpatrick and M. D. Schifter (eds.), *A Research Companion to the Principles and Standards for School Mathematics* (Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, 2003); D. L. Ball, "With an Eye on the Mathematical Horizon: Dilemmas of Teaching Elementary School Mathematics," *Elementary School Journal* 93, no. 4 (1993): 373-397; J. Hiebert and D. Wearne, "Instructional Tasks, Classroom Discourse, and Learners' Learning in Second-Grade Arithmetic," *American Educational Research Journal* 30, no. 2 (1993): 393-425.
- 34 B. Piper, *Integrated Education Program: Impact Study of SMRS Using Early Grade Reading Assessment in Three Provinces in South Africa* (Washington, DC: USAID, 2009), <https://nicspaul.files.wordpress.com/2015/01/piper-2009-egra-south-africa-smrs.pdf>; M. Dubeck, M. C. H. Jukes, and G. Okello, "Early Primary Literacy Instruction in Kenya," *Comparative Education Review* 56, no. 1 (2012): 48-68.
- 35 L. Pritchett y A. Beatty, "Consecuencias negativas de los planes de estudios excesivamente ambiciosos en los países en desarrollo", Documento de trabajo del Center for Global Development (Centro para el desarrollo global) 293 (2012), https://www.cgdev.org/sites/default/files/1426129_file_Pritchett_Beatty_Overambitious_FINAL_0.pdf.
- 36 World Bank, *World Development Report*, 2018.
- 37 S. Kusaka, "Issue Analysis of Competency-Based Mathematics Curriculum Design in African Countries: A Case Study of Mozambique's Primary Mathematics Education," *Journal of Education and Learning* 9, no. 1 (2019).
- 38 National Governors Association Center for Best Practices and Council of Chief State School Officers, *Common Core State Standards for Mathematics* (Washington, DC: National Governors Association Center for Best Practices and Council of Chief State School Officers, 2010).
- 39 N. Evans and E. Acquaye, "Problematising the Familiar in Ghana: Can an In-Service Model Based on Authentic Problem-Solving Help Teachers' Construct Deeper Understandings of New Mathematics Instructional Models?," paper presented at Comparative and International Education Society 2018 conference, Mexico City.
- 40 Bethell, *Mathematics Education in Sub-Saharan Africa*, 2016.
- 41 R. E. Slavin and C. Lake, "Effective Programs in Elementary Mathematics: A Best-Evidence Synthesis," *American Educational Research Association* 78, no. 3 (2008).
- 42 J. Boaler, *What's Math Got to Do with It? Helping Children Learn to Love Their Most Hated Subject—and Why It's Important for America* (New York: Viking, 2008); C. O'Connor, S. Michaels, and S. Chapin, "'Scaling Down' to Explore the Role of Talk in Learning: From District Intervention to Controlled Classroom Study," in L. B. Resnick, C. Asterhan, and S. N. Clarke (eds.), *Socializing Intelligence through Talk and Dialogue* (Washington, DC: American Educational Research Association, 2015); E. Naslund-Hadley, S. W. Parker, and J. M. Hernandez-Agramonte, "Fostering Early Math Understanding: Experimental Evidence from Paraguay," *Global Education Review* 1, no. 4 (2014): 135-154; A. J. H. Boonen, J. Jolles, M. van der Schoot, and F. van Wesel, "The Role of Visual Representation Type, Spatial Ability, and Reading Comprehension in Word Problem Solving: An Item-Level Analysis in Elementary School Children," *International Journal of Educational Research* 68 (2014): 15-26; J. Woodward, S. Beckmann, M. Driscoll, et al., *Improving mathematical problem solving in grades 4 through 8: Summary of Evidence for Instructional Tips Based on the Educator's Practice Guide* (Washington, DC: National Center for Education Evaluation and Regional Assistance, Institute of Education Sciences, US Department of Education, 2012); Y. Sitabkhan, J. Davis, D. Earnest, et al., "Instructional Strategies for Mathematics in the Early Grades," Mathematics Working Group Working Paper (Washington, DC: USAID, 2019), <https://shared.rti.org/content/instructional-strategies-mathematics-early-grades>.
- 43 L. Pritchett and R. Banerji, *Schooling Is Not Education: Using Assessment to Change the Politics of Non-learning* (Washington, DC: Centre for Global Development, 2013).
- 44 Black and William (1998), cited in N. Evans, D. Srikantaiah, A. Pallangyo, et al., "Towards the Design and Implementation of Comprehensive Primary Grade Literacy and Numeracy Programs," Global Reading Network Working Paper (Washington, DC: USAID, 2019).
- 45 Atweh et al., *Teaching Numeracy in Pre-school and Early Grades in Low Income Countries*, 2014; D. K. Evans, A. Popova, and V. Arancibia, "Training Teachers on the Job: What Works and How to Measure It," Policy Research Working Paper No. 7834 (World Bank, 2016).
- 46 L. Ma, *Knowing and Teaching Elementary Mathematics: Teachers' Understandings of Fundamental Mathematics in China and the United States* (Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, 1999); J. Pryor, K. Akyeampong, J. Westbrook, and K. Lussier, "Rethinking Teacher Preparation and Professional Development in Africa: An Analysis of the Curriculum of Teacher Education in the Teaching of Early Reading and Mathematics," *Curriculum Journal* 23, no. 4 (2012): 409-502.
- 47 H. Hill and D. Ball, "Learning Mathematics for Teaching: Results from California's Mathematics Professional Development Institutes," *Journal for Research in Mathematics Education* 35, no. 5 (2004): 330-351.
- 48 T. Bold, D. Filmer, G. Martin, et al., "Enrollment without Learning: Teacher Effort, Knowledge, and Skill in Primary Schools," *Africa Journal of Economic Perspectives* 31, no. 4 (2017): 185-204.
- 49 Metzler and Woessmann (2012), cited in B. Bruns and J. Luque, *Great Teachers: How to Raise Student Learning in Latin America and the Caribbean* (Washington, DC: World Bank, 2018), p. 77.
- 50 K. Akyeampong, "Teacher Educators' Practice and Vision of Good Teaching in Teacher Education Reform Context in Ghana," *Educational Researcher* 46, no. 4 (2017); Pryor et al., "Rethinking Teacher Preparation," 2012; Bold et al., "Enrollment without Learning," 2017.
- 51 Inter-American Development Bank, *All Children Count* (Washington, DC: Inter-American Development Bank, 2015).
- 52 L. M. Kaino, M. G. Ngoepe, M. M. Phoshoko, et al., "Some Trends in Mathematics Professional Development in Selected Developing and Developed Countries: An Insight into Post-Apartheid South Africa" (University of South Africa, 2014), <https://directorymathsed.net/montenegro/Kaino.pdf>.



- 53 F. Hardman, J. Hardman, C. Agg, et al., "Changing Pedagogical Practice in Kenyan Primary Schools: The Impact of School-Based Training," *Comparative Education* 45, no. 1 (2009).
- 54 Nag et al. (2014), cited in B. Atweh, M. Graven, and H. Venkat, *Teaching Numeracy in Pre-school and Early Grades in Low Income Countries* (Bonn: GIZ, 2014).
- 55 B. Bruns and J. Luque, *Great Teachers: How to Raise Student Learning in Latin America and the Caribbean* (Washington, DC: World Bank, 2018).
- 56 Jorgensen et al. (2010), cited in B. Atweh, M. Graven, and H. Venkat, *Teaching Numeracy in Pre-school and Early Grades in Low Income Countries* (Bonn: GIZ, 2014).
- 57 Pryor et al., "Rethinking Teacher Preparation," 2012.
- 58 Evans and Acquaye, "Problematizing the Familiar in Ghana," 2018.
- 59 Pryor et al., "Rethinking Teacher Preparation," 2012.
- 60 Akyeampong, "Teacher Educators' Practice and Vision of Good Teaching," 2017, p. 16.
- 61 Sitabkhan et al., "Instructional Strategies," 2019.
- 62 Bethell, *Mathematics Education in Sub-Saharan Africa*, 2016.
- 63 Sitabkhan et al., "Instructional Strategies," 2019.
- 64 M. K. Stein and J. W. Bovalino, "Manipulatives: One Piece of the Puzzle," *Mathematics Teaching in Middle School* 6, no. 6 (2001): 356-360.
- 65 P. Swan and L. Marshall, "Revisiting Mathematics Manipulative Materials," *Australian Primary Mathematics Classroom* 15, no. 2 (2010): 13-19.
- 66 Clements (1999), cited in N. Evans, D. Srikantaiah, A. Pallangyo, et al., "Towards the Design and Implementation of Comprehensive Primary Grade Literacy and Numeracy Programs," Global Reading Network Working Paper (Washington, DC: USAID, 2019).
- 67 R. S. Liggett, "The Impact of Use of Manipulatives on the Math Scores of Grade 2 Students," *Brock Education Journal* 26, no. 2 (2017): 88.
- 68 Evans et al., "Towards the Design and Implementation," 2019.
- 69 D. H. Clements, "'Concrete' Manipulatives, Concrete Ideas," *Contemporary Issues in Early Childhood* 1 no. 1 (1999): 45-60.
- 70 D. L. Ball, "Magical Hopes: Manipulatives and the Reform of Math Education," *American Educator: The Professional Journal of the American Federation of Teachers* 16, no. 2 (1992): 14-18, 46-47.
- 71 Sitabkhan et al., "Instructional Strategies for Mathematics in the Early Grades," 2019.
- 72 K. J. Carbonneau, S. C. Marley, and J. P. Selig, "A Meta-Analysis of the Efficacy of Teaching Mathematics with Concrete Manipulatives," *Journal of Educational Psychology* 105, no. 2 (2013): 380-400.
- 73 Inter-American Development Bank, *All Children Count*, 2015; B. Piper, W. Ralaingita, L. Akach, and S. King, "Improving Procedural and Conceptual Mathematics Outcomes: Evidence from a Randomised Controlled Trial in Kenya," *Journal of Development Effectiveness* 8, no. 3 (2016): 404-422.
- 74 N. Evans and M. Alejandra Sorto, Desk Review: Bala Wande Grade 1 Teacher Guide and Learner Activity Book, https://fundawande.org/img/cms/news/Funda_Wande_Maths_Report.pdf.
- 75 Sitabkhan et al., "Instructional Strategies for Mathematics in the Early Grades," 2019.
- 76 B. Piper, Y. Sitabkhan, and E. Nderu, "Mathematics from the Beginning: Evaluating the Tayari Pre-Primary Program's Impact on Early Mathematic Skills," *Global Education Review* 5, no. 3 (2018): 57-81.
- 77 Stein and Bovalino, "Manipulatives: One Piece of the Puzzle," 2001.
- 78 Swan and Marshall, "Revisiting Mathematics Manipulative Materials," 2010.
- 79 F. Yuan and D. Evans, "The Working Conditions of Teachers in Low and Middle Income Countries," working paper (Washington, DC: World Bank, 2018), <https://riseprogramme.org/sites/default/files/inline-files/Yuan.pdf>.
- 80 UNESCO, *School Resources and Learning Environments in Africa: Key Results from a Regional Survey on Factors Affecting Quality of Education* (Paris: UNESCO, 2016).
- 81 N. Read, *Measures of Learning and Teaching Material Availability and Use in Sub-Saharan Africa and Other Low Income Countries* (Paris: UNESCO, 2016).
- 82 S. Lutfeali, Save the Children field observation visits, 2013-2019.
- 83 K Akyeampong, "Teacher Educators' Practice and Vision of Good Teaching," 2017.
- 84 D. Phuntsho, *Investigating Bhutanese Mathematics Teachers' Beliefs and Practices in the Context of Curriculum Reform*, PhD thesis, Queensland University of Technology (2016), https://eprints.qut.edu.au/95624/1/Phuntsho_Dolma_Thesis.pdf.
- 85 RTI International, *Education Data for Decision Making (EdData II): National Early Grade Literacy and Numeracy Survey-Jordan* (Washington, DC: USAID, 2015), <https://shared.rti.org/content/education-data-decision-making-eddata-ii-national-early-grade-literacy-and-numeracy-survey>.
- 86 Yuan and Evans, "The Working Conditions of Teachers in Low and Middle Income Countries," 2018.
- 87 Y. Sitabkhan and K. Ampadu, *Shifting Teacher Practices in Ghana: A Case Study* (2021).